Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Révisions d'analyse de PCSI

Conséquences pratiques du théorème fondamental :

pour f continue et F primitive, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

pour $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $x_0 \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui vaut 0 en x_0.

Fonction usuelles $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \cos, \sin, \tan, \arctan$: dérivées, graphes

Notion de prolongement par continuité.

Calcul d'intégrale faisant intervenir les techniques vues en première année

ch. I : Intégration

— rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k}{N}(b-a)\right)}$

— **théorème fondamental du calcul intégral** :
Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $\boxed{f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$

— Fonctions continues par morceaux, notation $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, généralisation de la notion d'intégrale sur un segment à ces fonctions.

— Définition de la **nature d'une intégrale généralisée** d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle réel de la forme $[a, +\infty[$.

— Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles : $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 1}$, , $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta > 0}$, **[preuves]**

— **Critère (C.N.S.) de convergence pour une fonction positive** sur $[a, +\infty[$ (et continue ou continue par morceaux) :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x > a$. **[preuve ⋆]** dans le cas continu.

— Définition de la nature d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle quelconque.

— Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$, , $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t = -1}$, **[preuves]**

— Intégrale absolument convergente

— **Définition (à connaître) : intégrabilité d'une fonction c.p.m.** sur un intervalle réel quelconque.

— Propriété : Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\mathrm{d}t$ converge,

— intégrabilité au voisinage d'une borne.

— **Théorèmes de comparaison** en une borne, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) par majoration du module, ou équivalent ou domination.

— Propriétés de l'intégrale généralisée convergente : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles

— **Changement de variable, version généralisée** :

Théorème 1.

Pour $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement croissante.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge.

Si tel est le cas, alors $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u}$

— **Intégration par parties, version généralisée** :

Proposition 2.

Soient I, $\alpha = \inf(I)$, $\beta = \sup(I)$, et u, v de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $\lim\limits_\alpha uv$ et $\lim\limits_\beta uv$ existent et sont finies.

Alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta u'v$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta uv'$ sont de même nature et en cas de convergence (simultanée), on a :

$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\;\mathrm{d}t = \lim_{x\to\alpha^+,\, y\to\beta^-} [u(t)v(t)]_{t=x}^y - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

à venir : Algèbre linéaire

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8
(bientôt, Margot T2 ? ? ?)