Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. II : Algèbre linéaire générale

0) rappels de PCSI :

- espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.
  Somme directe $F \oplus G$ de deux sous-espaces vectoriels de E, avec $F \oplus G \subset E$.
  Sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.
- vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ;
  Compétence : Savoir justifier qu'une application est linéaire, un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.
- projecteurs, symétries.

1) Compléments PC

- $\boxed{\textbf{Somme} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} E_i}$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1, \dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. $\boxed{\textbf{Somme directe} \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i}$ de plusieurs s.-e.v..
- Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel.
- **Base adaptée** à une somme directe.
- Relation $\boxed{\dim\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{s} F_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \dim(F_i)}$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.
- **Sous-espace vectoriel stable** par un endomorphisme.
- $\boxed{\text{Endomorphisme induit } u|_{F}^{F}}$ sur un sous-espace vectoriel F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.

  Compétence : les étudiants doivent savoir définir la notion de projecteur, connaître la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et savoir que $\mathrm{Im}(p) = \{y \in E ; p(y) = y\}$, un dessin peut-être demandé.
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(u)$ **et** $\mathrm{Im}(u)$ **sont stables par** u **[preuves]**
  Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v **[preuves]**
- **Caractérisation matricielle s'un s.e.v. stable** :
  F est stable par u ssi la matrice de u dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ est triangulaire par blocs. **[preuve ⋆]**
- Calculs matriciel par blocs.

ch. I : Intégration

- **Méthode d'étude** de la nature d'une intégrale généralisée.
- **Théorèmes de comparaison** en une borne, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) par majoration du module, ou équivalent ou domination.
- Propriétés de l'intégrale généralisée convergente : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles
- **Changement de variable, version généralisée** :

Théorème 1.

Pour $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement croissante.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge.

Si tel est le cas, alors $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\mathrm{d}u}$

- **Intégration par parties, version généralisée** :

Proposition 2.

Soient I, $\alpha = \inf(I)$, $\beta = \sup(I)$, et u, v de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $\lim\limits_{\alpha} uv$ et $\lim\limits_{\beta} uv$ existent et sont finies.

Alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta u'v$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta uv'$ sont de même nature et en cas de convergence (simultanée), on a : $\displaystyle\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\lim_{x \to \alpha^+,\, y \to \beta^-} [u(t)v(t)]_{t=x}^{y} - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$

à venir : déterminants (rappels), et compléments : déterminants de matrices semblables, calculs dans le cas triangulaire par blocs ; trace d'une application linéaire en dimension finie.

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8