Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. II : Algèbre linéaire générale

0) rappels de PCSI :

— espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.

Somme directe $F \oplus G$ de deux sous-espaces vectoriels de E, avec $F \oplus G \subset E$.

Sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans $E : F \oplus G = E$.

— vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite;

Compétence : Savoir justifier qu'une application est linéaire, un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.

— projecteurs, symétries.

1) Compléments PC

— $\boxed{\textbf{Somme } \sum_{i=1}^{s} E_i}$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1, \dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. $\boxed{\textbf{Somme directe } \bigoplus_{i=1}^{p} E_i}$ de plusieurs s.-e.v..

— Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel.

— **Base adaptée** à une somme directe.

— Relation $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{s} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{s} \dim(F_i)}$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

— **Sous-espace vectoriel stable** par un endomorphisme.

— $\boxed{\text{Endomorphisme induit } u_{|F}^{|F}}$ sur un sous-espace vectoriel F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.

Compétence : les étudiants doivent savoir définir la notion de projecteur, connaître la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et savoir que $\mathrm{Im}(p) = \{y \in E; p(y) = y\}$, un dessin peut-être demandé.

— Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(u)$ **et** $\mathrm{Im}(u)$ **sont stables par** u **[preuves]**

Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v **[preuves]**

— **Caractérisation matricielle s'un s.e.v. stable** :
F est stable par u ssi la matrice de u dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ est triangulaire par blocs. **[preuve ⋆]**

— Calculs matriciel par blocs.

3) Déterminants

— Calculs de déterminants : propriétés usuelles, déterminant d'un produit de matrices. Déterminant et caractérisation de la liberté d'un famille de vecteurs colonnes.

— **Formule de développement** par rapport à une ligne ou une colonne.

— Déterminants triangulaire par blocs.

— **Matrices semblables**.

— **Deux matrices semblables ont même déterminant**. **[preuves]**

Déterminant d'un endomorphisme.

4) Traces

— **Trace** d'une matrice, d'un endomorphisme.
Linéarité

— **trace d'un produit** **[preuve⋆]**

— **trace d'une transposée**;

N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases; Matrice produit et coefficients.

— **Deux matrices semblables ont même trace**. **[preuve]**

— Espaces vectoriels produits.

N.B. pour les colleurs : les déterminants de Vandermonde seront vus aux chapitre d'algèbre linéaire suivant lors de l'interpolation de Lagrange.

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8