Ch. : Séries numériques

Révisions de PCSI

- *Nouveautés PSI sur les séries numériques :*
  - Séries alternées, **Critère spécial des séries alternées** et **majoration du reste** $|R_N| \leq |u_{N+1}|$.
  - **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$
  - Produit de Cauchy (démonstration non exigible) : si $\sum_p u_p$ et $\sum_q v_q$ sont ACV, alors la série $\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{n-p}\right)$ est ACV et sa somme est égale aux produit $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \times \sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$.

- *Exemples à savoir traiter :*

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n \geq 1$ par $s_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, est décroissante et minorée donc convergente vers une limite γ.

$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument convergente.

$\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, même si son terme général est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est lui le terme général d'une série convergente.

N.B. les séries exponentielles, la comparaison série-intégrale, la règle de d'Alembert ne peuvent faire l'objet d'exercices que pour les 5/2

chap. : Suites et séries de fonctions

- **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$
- **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
  $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t)-f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$
- La convergence uniforme implique la convergence simple. **[preuve pour les 5/2]**
- **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme.
- **interversion limite-intégrale** sur un segment en cas de convergence uniforme, pour des fonctions continues :
  $$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$
  [preuve pour les 5/2]
- **Théorème de convergence dominée**[Admis]
  Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :
  i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;
  ii) la suite (f_n) **CVS** sur I vers f **continue par morceaux sur** I ;
  iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$.
  (hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)
  Alors les fonctions $\boxed{f_n,\text{ pour } n\in\mathbb{N}, \text{ et } f \text{ sont intégrable sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n}$.
- **Théorème de dérivation** de la limite d'une suite de fonctions :
  Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui CVS sur I vers f, et telle que la suite (f_n') de ses dérivées CVU sur I vers h. Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.
- Série de fonctions. **Convergence simple**. Suite des fonctions sommes partielles. Fonction somme en cas de convergence simple.
- **Convergence uniforme** et **Convergence normale** d'une série de fonctions sur un intervalle.
  La convergence normale implique la convergence uniforme.
  La convergence uniforme implique la convergence simple.
- **Continuité de la somme** d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.
- **Théorème d'intégration terme à terme** sur un segment avec CVU
- **Théorème d'intégration terme à terme** sur un intervalle qcq
- **Théorème de dérivation terme à terme**

- *Exemples à connaître :*
  $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1,+\infty[$
  $S : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ est définie sur $]-1,1]$

N.B. pour les colleurs : les
Généralisation aux dérivées successives, et extension au cas de convergences uniformes sur tout segment : polycopié distribué