Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. IV : Polynômes annulateurs ; interpolation

- Evaluation d'un polynôme en une matrice ou en un endomorphisme
- **Polynôme annulateur** d'une matrice ou d'un endomorphisme.
- **Calcul de l'inverse** à l'aide d'un polynôme annulateur (ne s'annulant pas en 0)
- **Calcul des puissances** d'une matrice via le polynôme de reste de la division euclidienne par un polynôme annulateur.
- **Polynômes d'interpolation de Lagrange** en les $(x_0, \ldots, x_n)$ deux à deux distincts :
  l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $L_i(x_j) = \delta_i^j$ pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$ est $L_i = \displaystyle\prod_{0 \leq k \leq n,\ k \neq i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$
  [énoncé pour tous] **[preuve niveau ⋆]**
- Théorème d'interpolation : $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et la décomposition unique d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est donnée par la formule :
  $$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$
  lemme : $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ **[niveau ⋆]**
- Déterminants de Vandermonde.
  Formule $V_n(x_1, \ldots x_n) = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (x_j - x_i)$
  [pour tous]

ch. III : Séries numériques, rappels et compléments

1. Rappels de PCSI : sommes partielles, somme et restes d'une série convergente, séries de référence (**Riemann**, **géométrique**, **exponentielle**)
   C.N.S. de convergence pour une série à termes ≥ 0, absolue convergence, grossière divergence.
   Théorème de comparaison ($0 \leq |u_n| \leq v_n$, via $O(\,)$, via $\sim$ pour des séries positives).
2. Enonce de la **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$
3. **Technique de comparaison série intégrale**
   le théorème de comparaison série intégrale ne figure pas explicitement au programme mais à connaître : **principe de comparaison série intégrale :**
   les étudiants doivent savoir représenter graphiquement et encadrer des $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\, \mathrm{d}t$ pour une fonction monotone, puis obtenir des encadrements de sommes partielles à l'aide d'intégrale pour conclure.
   Les étudiants savent ensuite conlure que si $f : [n_0, +\infty[$ est continue (p.m.), décroissante, positive, alors $\displaystyle\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t$ ont même nature.
   Obtention d'équivalents de restes d'une série convergente, ou d'équivalents de sommes partielles de séries divergentes.
4. **Règle de d'Alembert** des séries numériques, application aux séries exponentielles.
5. **Théorème spécial des séries alternées**, avec signe du reste et majoration.
6. Produit de Cauchy de deux séries A.C.V.

---

on pourra demander aux étudiants **[preuve ⋆]** des exemples explicites de séries telles que :

- $\sum u_n$ CV mais $\sum |u_n|$ DV, telle $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
- $\sum u_n$ CV, $\sum v_n$ DV et $u_n \sim v_n$,

telles $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$.

- *L'asymptotique* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \underset{n \to +\infty}{=} \gamma + o(1)$ *ne figure pas*

explicitement au programme, mais peut faire l'objet d'un exercice

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8