Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. IV : Polynômes annulateurs ; interpolation

— Evaluation d'un polynôme en une matrice ou en un endomorphisme

— **Polynôme annulateur** d'une matrice ou d'un endomorphisme.

— **Calcul de l'inverse** à l'aide d'un polynôme annulateur (ne s'annulant pas en 0)

— **Calcul des puissances** d'une matrice via le polynôme de reste de la division euclidienne par un polynôme annulateur.

— **Polynômes d'interpolation de Lagrange** en les $(x_0, \dots, x_n)$ deux à deux distincts :
l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $L_i(x_j) = \delta_i^j$ pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$ est $L_i = \displaystyle\prod_{0 \le k \le n,\ k \ne i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$

[énoncé pour tous] **[preuve niveau ⋆]**

— Théorème d'interpolation : $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et la décomposition unique d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est donnée par la formule :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$

lemme : $(L_0, \dots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ **[preuve niveau ⋆]**

— Déterminants de Vandermonde.
Formule $V_n(x_1, \dots x_n) = \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n}^{n} (x_j - x_i)$

[énoncé pour tous]

ch. V : Suites et séries de fonctions

I) Suites de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

[énoncé pour tous]

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si :
$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} ;\ \forall n \ge n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$

[quantification niveau ⋆]

— **Norme infinie** d'une fonction bornée sur un intervalle :
$\| \ \|_\infty^I : f \longmapsto \sup\{|f(t)| ; t \in I\}$
Calcul explicite via l'étude des variations pour une fonction dérivable sur I.

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions bornées sur un intervalle.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

[énoncé pour tous]

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N} ;\ \forall n \ge n_1, \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$

[quantification niveau ⋆]

— Estimation de $\|f_n - f\|_\infty^I$ via majoration à $n \in \mathbb{N}$ fixé de $\sup\{|f_n(t) - f(t)| ; t \in I\}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple.
[niveau ⋆] *(avec des quantificateurs* $\forall, \exists$*)*

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme.

[énoncé pour tous] **[preuve niveau ⋆]**

— **Théorème d'intégration de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors f est continue, la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t) \mathrm{d}t\right)$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

[énoncé et démonstration pour tous]

— **Théorème de dérivation de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers g, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$

[énoncé pour tous] **[preuve niveau ⋆]**

— **Théorème de convergence dominée.**
Si $(f_n) \in (\mathcal{CM}(I, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux et vérifie l'hypothèse de domination :
il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n t -)| \le \varphi(t)$$

Alors les f_n et f sont intégrables, la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n\right)$ converge, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$.

[énoncé pour tous, preuve H.P.]

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8