Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. V : Suites et séries de fonctions

I) Suites de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

[énoncé pour tous]

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si :
$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

[quantification niveau ⋆]

— **Norme infinie** d'une fonction bornée sur un intervalle :
$\|\ \|_\infty^I : f \longmapsto \sup\{|f(t)|; t \in I\}$

Calcul explicite via l'étude des variations pour une fonction dérivable sur I.

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions bornées sur un intervalle.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

[énoncé pour tous]

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq n_1, \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

[quantification niveau ⋆]

— Estimation de $\|f_n - f\|_\infty^I$ via majoration à $n \in \mathbb{N}$ fixé de $\sup\{|f_n(t) - f(t)|; t \in I\}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple.

[niveau ⋆] *(avec des quantificateurs* $\forall, \exists$*)*

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme.

[énoncé pour tous] **[preuve niveau ⋆]**

— **Théorème d'intégration de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors f est continue, la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

[énoncé et démonstration pour tous]

— **Théorème de dérivation de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers g, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$

[énoncé pour tous] **[preuve niveau ⋆]**

— **Théorème de convergence dominée.**

Si $(f_n) \in (\mathcal{CM}(I, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux et vérifie l'hypothèse de domination :

il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n t-)| \leq \varphi(t)$$

Alors les f_n et f sont intégrables, la suite $\left(\int_I f_n\right)$ converge, et $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$.

[énoncé pour tous, preuve H.P.]

II) Séries de fonctions

— Série de fonctions : notation $\sum_{n\geq 0} f_n$, suite $\left(\sum_{k=0}^N f_k\right)_N$ des fonctions sommes partielles

— **Convergence simple** d'une série de fonctions. Notation de la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

• *A connaître :* $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1, +\infty[$

[preuve pour tous]

— **Convergence uniforme** d'une série de fonctions. Difficulté pratique d'étudier $\|S - S_N\|_\infty^I$.

Utilisation pratique du théorème spécial des séries alternées pour majorer uniformément la fontion de reste R_N : $x \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$.

— **Convergence normale** d'une série de fonctions bornées, lorsque $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_\infty^I$ est une série numérique convergente.

— **Liens entres les trois notions de convergence** La convergence normale sur un intervalle implique la convergence simple. **[niveau ⋆]**

La convergence normale sur un intervalle implique la convergence uniforme.

La convergence uniforme sur un intervalle implique la convergence simple.

⟶ T.S.V.P.

— **Théorème de continuité de la somme**
d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.

— **Théorème d'intégration terme à terme**
sur un segment avec CVU

— **Théorème d'intégration terme à terme**
sur un intervalle quelconque avec hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

— **Théorème de dérivation terme à terme**
L'hypothèse de convergence uniforme sur l'intervalle I de la série des dérivées peut-être adaptée en une hypothèse plus légère de convergence uniforme sur tous les segments de l'intervalle I.

- *A connaître :* $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est ce classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$
  [preuve pour tous] Théorème de dérivations successives terme à terme.

- *Exemple à savoir traiter :* **[pour tous]**
  $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

— **Théorème de la double limite**[Admis, preuve HP]
si une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

à venir : dérivations successives de la limite d'une suite de fonctions, ou terme à terme de la somme d'une série de fonctions

Liste (en construction) **[préparation avancée $\star$]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8