Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. V : Suites et séries de fonctions

II) Séries de fonctions

— Série de fonctions : notation $\sum_{n\geq 0} f_n$, suite $\left(\sum_{k=0}^{N} f_k\right)_N$ des fonctions sommes partielles

— **Convergence simple** d'une série de fonctions. Notation de la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

• *A connaître :* $\zeta \ : \ x \ \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1, +\infty[$

[preuve pour tous]

— **Convergence uniforme** d'une série de fonctions. Difficulté pratique d'étudier $\|S - S_N\|_\infty^I$.

Utilisation pratique du théorème spécial des séries alternées pour majorer uniformément la fontion de reste R_N : $x \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$.

— **Convergence normale** d'une série de fonctions bornées, lorsque $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|_\infty^I$ est une série numérique convergente.

— **Liens entres les trois notions de convergence** La convergence normale sur un intervalle implique la convergence simple. **[niveau ⋆]**

La convergence normale sur un intervalle implique la convergence uniforme.

La convergence uniforme sur un intervalle implique la convergence simple.

⟶ T.S.V.P.

— **Théorème de continuité de la somme** d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un segment avec CVU

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un intervalle quelconque avec hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$.

— **Théorème de dérivation terme à terme**

L'hypothèse de convergence uniforme sur l'intervalle I de la série des dérivées peut-être adaptée en une hypothèse plus légère de convergence uniforme sur tous les segments de l'intervalle I.

• *A connaître :* $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est ce classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

[preuve pour tous] Théorème de dérivations successives terme à terme.

• *Exemple à savoir traiter :* **[pour tous]**

$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

— **Théorème de la double limite**[Admis, preuve HP] si une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum_{n\geq 0} \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

ch. VIII : Réduction

— Rappels : sous-espaces stables d'un endomorphisme ; droite stable

— **vecteur propre**, **valeur propre**, **spectre**, **sous-espaces propres** d'un endomorphisme ou d'une matrice ;

Les étudiants doivent pouvoir, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, faire le lien entre l'inversibilité ou non de $\lambda \mathrm{id}_E - u$ et le fait que λ n'est pas ou est une valeur propre.

— λ **valeur propre de** u **si et seulement si** $\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0$

— **Détermination explicites des éléments propres** :

i) on cherche les valeurs propres λ en résolvant $\det(\lambda I_n - A) = 0$, à l'aide d'une factorisation de $\det(x\mathrm{id}_E - u)$ ou $\det(xI_n - A)$

ii) Pour chaque valeur propre λ, on détermine el sous-espace propre associé E_λ en résolvant le système $AV = \lambda V$ d'inconnue $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

à venir la semaine du 25/11 :

1. *à venir* **Polynôme caractéristique** χ_u *(unitaire) d'un endomorphisme* u*, via sa matrice* A *dans une base :*

$$\boxed{\chi_A(x) = \det(xI_n - A)}$$
$$\boxed{\quad = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)}$$

$$\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)}$$

2. *à venir Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.* **[preuve $\star$]**

3. *à venir* **multiplicité d'une valeur propre**

4. *à venir Lorsque* χ_A *est* **scindé** *sur* $\mathbb{K}$ *:*

$$\boxed{\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (x-\lambda)^{m_\lambda}}$$
$$\boxed{n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda}, \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m_\lambda}},$$
$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda \times \lambda}$$

5. *à venir Si* P *est un polynôme annulateur de* u *et* λ *une valeur propre de* u*, alors* $P(\lambda) = 0$ **[preuve $\star$]**

dérivations successives de la limite d'une suite de fonctions, ou terme à terme de la somme d'une série de fonctions

Liste (en construction) **[préparation avancée $\star$]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8