Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** ou **[énoncés]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VIII : Réduction

— Rappels : s-e.v. stables d'un endomorphisme ; droite stable

— **vecteur propre**, **valeur propre**, **spectre**, **sous-espaces propres** d'un endomorphisme ou d'une matrice ;

Les étudiants doivent pouvoir, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, faire le lien entre l'inversibilité ou non de $\lambda \mathrm{id}_E - u$ et le fait que λ n'est pas ou est une valeur propre.

— λ **valeur propre de** u **ssi** $\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0$

— **Détermination explicites des éléments propres** :

i) on cherche les valeurs propres λ en résolvant $\det(\lambda I_n - A) = 0$, à l'aide d'une factorisation de $\det(x\mathrm{id}_E - u)$ ou $\det(xI_n - A)$

ii) Pour chaque valeur propre λ, on détermine le sous-espace propre associé E_λ en résolvant le système $AV = \lambda V$ d'inconnue $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

— **Polynôme caractéristique** χ_u (unitaire) d'un endomorphisme u, via sa matrice A dans une base :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_A(x) = \det(xI_n - A)}$$

$$\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

— Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. **[preuve ⋆]**

— **multiplicité d'une valeur propre**

— Lorsque χ_A est **scindé** sur $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}}$$

$$\boxed{n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda},\ \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m_\lambda}},$$

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda \times \lambda}$$

— Si P est un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u, alors $P(\lambda) = 0$ **[énoncé pour tous]** **[preuve ⋆]**

— Théorème de **Cayley-Hamilton** : le polynôme caractéristique est annulateur.

— **Diagonalisabilité d'un endomorphisme** en dimension finie, lorsqu'il existe une base (de vecteurs propres) dans laquelle la matrice est diagonale.

— **Diagonalisabilité d'une matrice carrée** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

— Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est libre. **[énoncé pour tous]** **[preuve ⋆]**

— **Les sous-espaces propres d'un endomorphismes sont en somme directe.** **[énoncé pour tous]** **[preuve ⋆]**

— Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, $\boxed{1 \leq \dim(E_{\lambda,u}) \leq m_\lambda}$

[énoncé pour tous] **[preuve ⋆]**

les étudiants doivent connaître un exemple de matrice non diagonalisable tel
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Théorème de C.S. de diagonalisabilité** lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

— **1er Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité** pour un polynôme caractéristique scindé. Sont équivalentes :
i) A diagonalisable sur $\mathbb{K}$
ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} E_{\lambda,u}$,
iii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda}$.

— **2nd Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité via un polynôme annulateur**
Sont équivalentes :
i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
ii) il existe un polynôme annulateur P de A **scindé et à racines simples**
iii) $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A.

— Application : **Calcul des puissances** d'une matrice diagonalisable

— **Trigonalisabilité**,
Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé
preuve non exigible
en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

— **Systèmes de suites récurrentes linéaires** à coefficients constants, cas diagonalisable

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ \vdots \\ v_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et relation } V_{n+1} = A \times V_n$$

les étudiants doivent savoir en déduire une formule de la forme $V_n = PD^nP^{-1}V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *avec* D *diagonale, lorsque* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est diagonalisable.*

à venir : chapitre 7 : fonctions développables en séries entières

N.B. pour les interrogatrices ou interrogateurs : le programme ne mentionne pas explicitement les suites récurrentes linéaires ou les systèmes différentielles, tout exercice doit être guidé
programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8