Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** ou **[énoncés]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VIII : Réduction

- Eléments propres, diagonalisabilité.
- Théorème de **Cayley-Hamilton** : le polynôme caractéristique est annulateur.
- **Théorème de C.S. de diagonalisabilité** lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
- **1er Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité** pour un polynôme caractéristique scindé. Sont équivalentes :
  i) A diagonalisable sur $\mathbb{K}$
  ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} E_{\lambda,u}$,
  iii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda}$.
- **2nd Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité via un polynôme annulateur**
  Sont équivalentes :
  i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
  ii) il existe un polynôme annulateur P de A **scindé et à racines simples**
  iii) $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A.
- Application : **Calcul des puissances** d'une matrice diagonalisable
- **Trigonalisabilité**,
  Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé
  preuve non exigible
  en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
- **Systèmes de suites récurrentes linéaires** à coefficients constants, cas diagonalisable
  $$V_n = \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ \vdots \\ v_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et relation } V_{n+1} = A \times V_n$$
  les étudiants doivent savoir en déduire une formule de la forme $V_n = PD^nP^{-1}V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, avec D diagonale, lorsque $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est diagonalisable.

ch. IX : Séries entières

1. **Séries entières de la variable complexe.**
   - Série entière, notation (abusive) $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions. Somme d'une série entière.
   - Lemme d'Abel. **[énoncé ⋆]**
   - **Rayon de convergence** :
     $R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n| r^n)_n \text{ bornée }\}$.
   - Absolue convergence sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.
   - Séries entières de référence : rayon de convergence et somme sur le disque ouvert de convergence
     série entière géométrique $\sum z^n$,
     série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$
   - Détermination pratique du rayon de convergence :
     s'il existe z_1 tel que $\sum a_n z_1^n$ converge, alors $R \geq |z_1|$.
     s'il existe z_2 tel que $\sum a_n z_2^n$ diverge, alors $R \leq |z_2|$.
   - **règle de d'Alembert des séries entières**.
   - $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$ **[preuve ⋆]**
   - $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n_n^\alpha x^n\right)$, pour $\alpha > 0$.
   - **Comparaison de rayons de convergence** avec O ou $\sim$:
     Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
     Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$
   - **Rayon de convergence de la somme** de deux séries entières.

à venir : chapitre 7 : fonctions développables en séries entières sur un intervalle réel; dérivation terme à terme, primitivation terme à terme, DSE usuels

N.B. pour les interrogatrices ou interrogateurs : le programme ne mentionne pas explicitement les suites récurrentes linéaires ou les systèmes différentielles, tout exercice doit être guidé

programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8