Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VII : Séries entières

1. **Séries entières de la variable complexe.**
   - Série entière, notation (abusive) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions. Somme d'une série entière.
   - Lemme d'Abel. **[énoncé ⋆]**
   - **Rayon de convergence** : $R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n|r^n)_n \text{ bornée }\}$.
   - Absolue convergence sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.
   - Séries entières de référence : rayon de convergence et somme sur le disque ouvert de convergence
     série entière géométrique $\sum z^n$,
     série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$
   - Détermination pratique du rayon de convergence :
     s'il existe z_1 tel que $\sum a_n z_1^n$ converge, alors $R \geq |z_1|$.
     s'il existe z_2 tel que $\sum a_n z_2^n$ diverge, alors $R \leq |z_2|$.
   - **règle de d'Alembert des séries entières**.
   - $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$ **[preuve ⋆]**
   - $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n_n^\alpha x^n\right)$, pour $\alpha > 0$.
   - **Comparaison de rayons de convergence** avec O ou $\sim$:
     Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
     Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$
   - **Rayon de convergence de la somme** de deux séries entières.
   - Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.
   - Produit de Cauchy de deux séries entières.

2. **Séries entières de la variable réelle.**
   - Série entière d'une variable réelle.
     Intervalle **ouvert de convergence** $]-R, R[$.
   - **Convergence normale sur tout segment** de l'intervalle ouvert de convergence d'une série entière de la variable réelle. **[preuve ⋆]**
   - Continuité de la somme d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence $]-R, R[$.
   - **Primitivation terme à terme** sur l'ouvert de convergence.
   - **Dérivation terme à terme** sur l'ouvert de convergence.
   - **Dérivations succesives terme à terme** sur l'ouvert de convergence : La fonction somme $S : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert de convergence $]-R, R[$ et :
     $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in]-R, R[,\ S^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k}$$
   - Fonction développable en série entière.
   - **Unicité du développement en série entière** :
     Si $S : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur un intervalle ouvert non vide contenant 0, alors nécéssairement,
     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}}$$
     lien avec les développements limités (série de Taylor).

     D.S.E. usuels (et rayons de convergence) :
     $\boxed{t \mapsto \ln(1-t),\ t \mapsto \frac{1}{1-t},\ t \mapsto \ln(1+t)}$,
     $\boxed{t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)}$
     $\boxed{\exp,\ \operatorname{ch},\ \operatorname{sh},\ \cos,\ \sin}$
   - DSE via une équation différentielle :
     DSE de $t \mapsto (1+t)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
     pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle linéaire

à venir : chapitre 8 : Probabilités sur un univers fini ou dénombrable.

N.B. pour les interrogatrices ou interrogateurs : il n'y a pas de théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations déifférentielles linéaires d'ordre p, ni de méthode de Lagrange pour l'ordre 2, ni de résultat pour les systèmes différentiels linéaires en lien avec la réduction

Liste (en construction) **[préparation avancée $\star$]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8