Variables aléatoires discrètes

I Loi d'une variable aléatoire

1 Définition d'une variable aléatoire

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé quelconque. Une **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application X définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et pour toute partie U de $X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement :

$$\forall\ U \in \mathcal{P}\left(X(\Omega)\right), X^{-1}(U) \in \mathcal{A}.$$

Rq : Les seules variables aléatoires considérées dans le cours sont des variables aléatoires discrètes (même si ce n'est pas rappelé dans chaque énoncé).

Si $U \subset X(\Omega)$, on note : $X^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in U\} = \{X \in U\} = (X \in U)$.
En particulier, si $x \in X(\Omega)$, alors :
$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} = X^{-1}(x) = \{X = x\} = (X = x)$.
Si X est une variable aléatoire réelle, on note : $\{X \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leqslant x\}$ (idem pour $\{X \geqslant x\}$) .

Propriété 1 : Caractérisation d'une variable aléatoire discrète

> Soit X une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable.
> X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si et seulement si, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\{X = x\}$ est un événement.

Exemple : Si $A \in \mathcal{A}$, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A est une variable aléatoire réelle discrète.

On admet la propriété suivante :

Propriété 2 : Image d'une variable aléatoire

> Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble E et f une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F. Alors $Y = f \circ X = f(X)$ est une variable aléatoire discrète .

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Propriété 3 : Définition d'une loi de probabilité

> Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
> L'application $P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \mapsto [0, 1]$ qui à toute partie U de $X(\Omega)$ associe $P(X \in U)$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$, appelée **loi de probabilité** de X.

$X(\Omega)$ étant au plus dénombrable, P_X est entièrement caractérisée par les probabilités élémentaires :

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, on peut poser : $\forall i \in [\![1, n]\!], p_i = P(X = x_i)$.
  Les événements $\{X = x_i\}, 1 \leqslant i \leqslant n$ forment un système complet d'événements.
  $p_1, \cdots, p_n$ sont n réels positifs tels que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Toute partie de $X(\Omega)$ étant finie, la probabilité d'un événement $\{X \in U\}$ se calcule en additionnant les probabilités p_i associées aux éléments de U.

- Si $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, on peut poser : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P(X = x_n)$.
  Les événements $\{X = x_i\}, i \in \mathbb{N}$ forment un système complet d'événements.
  $(p_n)_n$ est une suite de réels positifs tels que la série $\sum p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.
  Toute partie de $X(\Omega)$ étant au plus dénombrable, la probabilité d'un événement $\{X \in U\}$ se calcule en additionnant les probabilités p_i associées aux éléments de U : il peut s'agir de la somme d'un nombre fini de termes ou de la somme d'une série à termes positifs convergente.

On peut noter plus généralement : $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$.

Réciproquement, on admet que la donnée des p_n caractérise une loi de probabilité :

Propriété 4 :

1. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ et soient $p_1, \cdots, p_n$ n réels positifs tels que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Il existe alors une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que : $\forall i \in \mathbb{N}, p_i = P(X = x_i)$.
2. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ et $(p_n)_n$ une suite de réels positifs tels que la série $\sum p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. Il existe alors une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P(X = x_n)$.

Rq : Le choix de l'indexation des éléments de $X(\Omega)$ est arbitraire. Mais puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, ce choix n'influe pas sur la convergence de la série ni sur la valeur de sa somme.

3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition

Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La **fonction de répartition** de X est la fonction F_X de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

La fonction de répartition donne donc les probabilités cumulées : $F_X(x)$ se calcule en sommant (somme finie ou somme de série positive) les probabilités des événements $\{X = x_n\}$ pour toutes les valeurs $x_n \leqslant x$.

Propriété 5 : Propriétés de la fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est une fonction croissante, telle que : $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Propriété 6 : Fonction de répartition et loi

- Pour a et b réels tels que $a < b$, on a : $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- Si $X(\Omega) = \{x_n / n \in I\}$ avec : $\forall n, x_n < x_{n+1}$. Alors : $P(X = x_0) = F_X(x_0)$ et $\forall n \geqslant 1, P(X = x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$.

4 Rappel des lois finies usuelles

- **Loi uniforme :** On note : $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$. X suit la loi uniforme sur cet ensemble lorsque toutes les éventualités ont la même probabilité : $\forall k \in [\![1, n]\!], P(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.
  Exemples : X est le numéro apparu lorsqu'on lance un dé équilibré ou X est le numéro de la boule tirée lorsqu'on fait un tirage au hasard dans une urne contenant n boules numérotées.
- **Loi de Bernoulli :** C'est la loi d'une variable aléatoire telle que : $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Cette loi est caractérisée par le paramètre $p = P(X = 1) \in]0, 1[$, qui correspond à la probabilité de "succès".
  Exemple : On lance une pièce et on pose $X = 1$ si on obtient Pile (le "succès") et $X = 0$ sinon. Si la pièce est équilibrée, on a : $p = \dfrac{1}{2}$.
- **Loi binomiale :** Cette loi est caractérisée par deux paramètres : $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
  On a alors : $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!], P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
  Exemple : C'est la loi d'une variable aléatoire qui compte le nombre de succès (probabilité p) lors de n épreuves répétées indépendantes. Par exemple, on lance n fois une pièce de monnaie et on compte le nombre de Piles obtenus.

5 Loi géométrique

Définition

X suit une **loi géométrique** de paramètre $p \in]0, 1[$ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Rq : La définition est cohérente car on reconnaît une série géométrique positive de raison dans $]0, 1[$ donc convergente et dont la somme est égale à 1.

Interprétation : On considère une suite d'épreuves répétées indépendantes au cours desquelles un certain "succès" se réalise avec une probabilité p et on observe l'apparition du premier succès. La probabilité d'observer un succès dès la 1ère épreuve est égale à p. Celle d'observer le 1er succès à l'épreuve k est égale à $(1-p)^{k-1}p$. On constate en sommant la série que la probabilité d'obtenir au moins un succès est égale à 1. La probabilité de n'obtenir aucun succès lors de cette répétition infinie est donc nulle (événement quasi-impossible). On peut alors définir la variable aléatoire X égale au rang du premier succès. X suit la loi géométrique de paramètre p.

Propriété 7 : Caractérisation d'une loi géométrique

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. X suit une loi géométrique si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X > n) \neq 0 \text{ et } \forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, P(X > n + k | X > n) = P(X > k).$$

On dit que la loi géométrique est la seule **loi sans mémoire**.

6 Loi de Poisson

Définition

X suit une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Rq : La définition est cohérente car on reconnaît une série exponentielle donc convergente, positive et $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$.

Propriété 8 : Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda > 0$.

On a alors : $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Considérons une épreuve répétée un très grand nombre de fois, avec une probabilité de succès très faible. Soit λ le nombre moyen de succès et X la v.a. qui compte le nombre de succès. Alors X suit approximativement la loi de Poisson de paramètre λ.
On interprète ainsi la loi de Poisson comme la loi des événements rares.
Exemples typiques : nombre de personnes dans une file d'attente (guichet de poste, péage d'autoroute ...), nombre de défauts sur une pièce fabriquée industriellement, nombre de noyaux atomiques désintégrés pendant un intervalle de temps fixé, nombre de soldats morts par ruade de cheval dans l'armée prussienne (exemple de Von Bortkiewicz, fin XIXième siècle) ...

II Espérance et variance

1 Espérance

Définition

1. Si $X(\Omega)$ est fini, X admet une espérance définie par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.
2. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, la variable aléatoire X admet une espérance finie lorsque la série de terme général $x_i P(X = x_i)$ est absolument convergente, et alors :

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i P(X = x_i).$$

Rq : La condition de convergence absolue entraîne que cette définition est indépendante de la numérotation des valeurs prises par X.

Exemple : Si $A \in \mathcal{A}$, l'espérance de la fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ est égale à $P(A)$:

$$E(\mathbb{1}_A) = P(A).$$

Les propriétés vues en Sup dans le cas des variables aléatoires finies se généralisent au cas des variables aléatoires discrètes quelconques.

Théorème 9 : Théorème du transfert dans le cas fini

Soit X une variable aléatoire finie et f une fonction à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $f(X)$ a une espérance finie et :

$$E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)P(X = x_i).$$

Exemple : $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$.

On admet la généralisation :

Théorème 10 : Théorème du transfert dans le cas dénombrable

On suppose $X(\Omega)$ dénombrable : $X(\Omega) = \{x_i / i \in \mathbb{N}\}$. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $f(X)$ a une espérance finie si et seulement si la série $\sum f(x_i)P(X = x_i)$ est absolument convergente, et dans ce cas :

$$E(f(X)) = \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i)P(X = x_i).$$

Rq : L'intérêt du théorème du transfert est de permettre le calcul de l'espérance de la variable aléatoire $Y = f(X)$ sans avoir besoin d'expliciter la loi de probabilité de Y.

Propriété 11 : Propriétés de l'espérance

1. Linéarité : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes d'espérances finies. Pour tous réels a et b, $aX + bY$ a une espérance finie et :
$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$
2. Positivité : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs positives. Si X a une espérance finie, alors : $E(X) \geqslant 0$.
3. Croissance : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes d'espérances finies telles que : $X \leqslant Y$. Alors : $E(X) \leqslant E(Y)$.

On dit qu'une variable aléatoire est centrée lorsqu'elle admet une espérance nulle. Si X admet une espérance finie, $X - E(X)$ est donc centrée.

Propriété 12 : Cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant n)$ converge, et dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

2 Variance

Si X^2 est d'espérance finie, on dit que X admet un moment d'ordre 2.

Propriété 13 :

Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie, $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2.

Définition

Si X admet un moment d'ordre 2, la **variance** de X est le réel positif défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

L'**écart-type** de X est alors défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Rq : $V(X) = 0$ si et seulement si : $P(X = m) = 1$ avec $m = E(X)$.

Propriété 14 : Propriétés de la variance

Si X admet une variance, alors pour tous réels a et b :

$$V(aX + b) = a^2 V(x) \text{ et } \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Propriété 15 : Espérance et variance des lois usuelles

1. Soit X de loi binomiale de paramètres n et p ($p \in]0,1[$).

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

2. Soit X de loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$). On pose : $q = 1 - p$.

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{q}{p^2}$$

3. Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$).

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

3 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 16 : Inégalité de Markov

Soit X une v.a. réelle discrète positive ayant une espérance finie. On a alors :

$$\forall a > 0, P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Théorème 17 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a. réelle discrète ayant une variance finie. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Interprétation : Si la variance est faible, la probabilité pour que l'écart entre la valeur prise par X et la valeur moyenne $m = E(X)$ soit "grand" est faible. La variance est un indicateur de dispersion autour de l'espérance.

4 Fonction génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$

Définition

La **fonction génératrice** d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est définie par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$

Rq : Si $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de X est une fonction polynôme.

Propriété 18 : Propriétés de la fonction génératrice

1. G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$ et $G_X(1) = 1$. En particulier, G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
2. La fonction génératrice caractérise la loi de X : le développement en série entière de G_X donne la loi de X.

Conséquence : : Deux variables aléatoires dont les fonctions génératrices coincident sur un intervalle $]-r, r[, r > 0$ suivent la même loi.

Propriété 19 : Fonctions génératrices des lois usuelles

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = (pt + 1 - p)^n$.

Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors : $\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[, G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$.

Si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Théorème 20 : Fonction génératrice, espérance et variance

1. X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1, et alors : $G'_X(1) = E(X)$.
2. X admet une variance finie si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1, et alors : $G''_X(1) = E\big(X(X-1)\big)$.

Rq : Si G_X est deux fois dérivable en 1, on a alors : $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

III Couples de variables aléatoires

1 Loi conjointe, lois marginales

Propriété 21 : Couple de variables aléatoires

> Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. $Z = (X, Y)$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Rq : $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Pour simplifier l'écriture, on peut considérer qu'il y a égalité, quitte à ce que certains couples aient une probabilité nulle.

Définition

> La **loi conjointe** de X et Y est la loi de $Z = (X, Y)$, définie par :
>
> $$\forall (x, y) \in Z(\Omega), P(Z = (x, y)) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

La connaissance de la loi conjointe permet de déterminer les lois de X et de Y : on parle alors de **lois marginales**.
En effet, pour $x \in X(\omega)$, on a :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\omega)} P((X, Y) = (x, y))$$

.
Là encore, il s'agit soit d'une somme finie, soit de la somme d'une série positive convergente.
Dans le cas où les ensembles sont finis, on peut représenter la loi conjointe de X et Y dans un tableau à double entrée. Les lois marginales s'obtiennent alors en sommant les probabilités d'une ligne ou d'une colonne.
En revanche, la donnée des lois de X et Y ne suffit pas pour déterminer la loi conjointe.

2 Lois conditionnelles

Propriété 22 : Définition des lois conditionnelles

> Soit y dans $Y(\Omega)$ tel que : $P(Y = y) \neq 0$. L'application de $\mathcal{P}(X(\Omega))$ dans $[0, 1]$ qui à toute partie U de $X(\Omega)$ associe la probabilité conditionnelle $P(X \in U | Y = y)$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$, appelée **loi conditionnelle de X sachant que** $Y = y$, notée $P_{Y=y}$.

On peut définir de même la loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$, dès lors que : $P(X = x) \neq 0$.
La donnée de la loi de X et des lois conditionnelles de Y sachant que $X = x$ pour tout x tel que $P(X = x) \neq 0$ permet de déterminer la loi conjointe de X et Y :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(Z = (x, y)) = P(Y = y | X = x) P(X = x).$$

3 Couple de variables aléatoires indépendantes

Définition

Deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** lorsque : $(X,Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P((X,Y) = (x,y)) = P(X = x)P(Y = y).$$

Exemple : Deux v.a. associées à des expériences indépendantes sont indépendantes.

Rq : Si X et Y sont indépendantes, la donnée des lois de X et de Y suffit à déterminer la loi conjointe.

Propriété 23 : Indépendance et lois conditionnelles

X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout x tel que $P(X = x) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant que $X = x$ coïncide avec la loi de Y.

On admet les trois propriétés suivantes :

Propriété 24 :

Si X et Y sont indépendantes alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a : $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

Propriété 25 : Images de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Propriété 26 : Propriétés de 2 v.a. indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Rq : La réciproque est fausse. Prenons par exemple X de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = X^2$. Ces v.a. ne sont pas indépendantes, mais on a quand même : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Un exemple classique

Propriété 27 : Somme de deux variables de Poisson indépendantes

Soient X et Y 2 v.a indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre λ et μ. Alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Propriété 28 : Fonction génératrice d'une somme de 2 v.a. indépendantes

Soient X et Y 2 v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. La série génératrice de $X+Y$ est égale au produit de Cauchy des séries génératrices de X et de Y.
Si $|t|$ est strictement inférieur au plus petit des deux rayons de convergence, on a donc :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Rq : Si on connaît G_X et G_Y, le développement en série entière de leur produit peut alors permettre de déterminer la loi de probabilité de $X+Y$.

4 Covariance

Propriété 29 : Produit de 2 v.a.

Soient X et Y deux v.a. admettant des moments d'ordre 2. Alors le produit XY est d'espérance finie et : $E\Big((X-E(X))(Y-E(Y))\Big) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Conséquence : L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ayant un moment d'ordre 2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition

Soient X et Y deux v.a. admettant des moments d'ordre 2. La **covariance** de X et Y est définie par :

$$\text{cov}(X,Y) = E\Big((X-E(X))(Y-E(Y))\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Si de plus, $V(X)$ et $V(Y)$ ne sont pas nulles, le **coefficient de corrélation** de X et Y est défini par :

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Exemples : 1) Si $X=Y$, $\text{cov}(X,X) = V(X)$ et $\rho(X,X) = 1$.
2) Si X et Y sont indépendantes, alors : $\text{cov}(X,Y) = 0$.
Mais réciproquement, la condition $\text{cov}(X,Y) = 0$ n'entraîne pas l'indépendance.

Rq : L'application qui au couple (X,Y) associe sa covariance est une forme bilinéaire, symétrique et positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires discrètes ayant un moment d'ordre 2.

Propriété 30 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires ayant un moment d'ordre 2. Alors :

$$(E(XY))^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

$$|\text{cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

Si de plus les écarts-types ne sont pas nuls, alors : $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$.

Rq : On a donc : $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$. Les variables sont fortement corrélées lorsque $|\rho(X,Y)|$ se rapproche de 1, faiblement corrélées lorsque $|\rho(X,Y)|$ se rapproche de 0.

Propriété 31 : Variance d'une somme finie de v.a

Soient $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. discrètes de variances finies. Alors $X_1 + \cdots + X_n$ a une variance finie et :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$

En particulier : $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$.

5 Famille de variables aléatoires indépendantes

Définition

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires ou $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Ces variables aléatoires sont **2 à 2 indépendantes** lorsque, pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.
2. $X_1, \cdots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque, pour tout $a_k \in X_k(\Omega), k \in [\![1, n]\!]$, les événements $\{X_k = a_k\}$ sont mutuellement indépendants.
3. Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires $X_0, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Rq : L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance 2 à 2, la réciproque étant fausse.

Les familles de variables aléatoires indépendantes permettent de modéliser une succession d'épreuves répétées indépendantes (lancers d'une pièce de monnaie ...).

Exemple : La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de la somme de n v.a. de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p.

Propriété 32 : Variance d'une somme de v.a indépendantes

Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des v.a. sont 2 à 2 indépendantes, alors :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

Exemple : On retrouve ainsi la variance d'une v.a. de loi binomiale.

Théorème 33 : Loi Faible des Grands Nombres

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. 2 à 2 indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance commune et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Plus précisément, en notant σ l'écart-type commun, on a : $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

Interprétation : $\dfrac{S_n}{n}$ est la moyenne des n premières répétitions, d'espérance m. Lorsque n est grand, la valeur observée lors d'une réalisation de n épreuves constitue une bonne approximation de la valeur de l'espérance m.
Ce théorème est important dans les applications statistiques.