Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. IX : Intégrales à paramètre

— **Méthode d'étude de l'intégrabilité** d'une fonction sur un intervalle : ensemble de continuité, techniques de comparaison ($\sim$, o, O) en les bornes impropres.

les étudiants doivent réviser le chapitre sur les intégrales généralisées et savoir étudier la convergence d'une intégrale généralisée

— **Théorème de continuité** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible]. Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A\times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t)\longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A,\ f_{x,\bullet} : I \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux** sur I ;

ii) pour tout $t\in I,\ f_{\bullet,t} : I\to\mathbb{K},\ x\mapsto f(x,t)$ est **continue** sur A;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\,(x,t)\in A\times I,\ |f(x,t)|\le\varphi(t)$$

Alors $\boxed{G : A\longrightarrow\mathbb{K},\ x\longmapsto\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } A.}$

Généralisation au cas de domination (locale compacte) sur tous les segments d'un intervalle.

— **Théorème de dérivation** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].

Généralisation au cas de domination de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ sur des ensembles du type $[a,b]\times J$.

— **Exemple de la fonction** Γ d'Euler

$\Gamma : x\longmapsto\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. *N.B. : tous doivent savoir montrer la continuité ou la classe $\mathcal{C}^1$ en exercice*

— **Théorème de dérivations successives** d'une intégrale à paramètre, pour obtenir la classe $\mathcal{C}^k$ pour $k\in\mathbb{N}$. [Admis]

— **Théorème de convergence dominée à paramètre continu :** Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, a une borne de A, et $f : A\times I\longrightarrow\mathbb{K},\ (x,t)\longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) Pour tout $t\in I$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{}\ell(t)$

ii) Pour tout $x\in A$, $t\longmapsto f(x,t)$ et $t\longmapsto\ell(t)$ sont c.p.m. sur I

iii) il existe une fonction $\varphi : I\longrightarrow\mathbb{R}$ **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\,(x,t)\in A\times I,\ |f(x,t)|\le\varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\boxed{\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to a]{}\int_I\ell(t)\,\mathrm{d}t.}$

ch. VIII : Probabilités discrètes

— Dénombrabilités, sommabilité d'une famille discrète. Propriétés sur les familles sommables : croissance, linéarité, sommation par paquets, Fubini, produits de sommes

— Univers, évènement contraire, réunion dénombrable. Tribu des évènements, espace probabilisable.

— **Ecritures ensemblistes** avec $\bigcap,\bigcup$

— Loi de **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P}:\mathcal{A}\to[0,1]$ telle que :
i) $\mathbf{P}(\Omega)=1$; ii) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A_n)$. ($\sigma$-additivité)

— **Continuité croissante** : si $(A_n)_{n\geqslant0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n\in\mathbb{N},\ A_n\subset A_{n+1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)$.

— **Continuité décroissante** : si $(A_n)_{n\geqslant0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n\in\mathbb{N},\ A_{n+1}\subset A_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}A_n\right)$.

— **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A_n)$.

— Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements**; famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.

— Formule $\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A)$

— **Formule des probabilités composées** $\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)\neq0$, alors
$\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n)=\mathbf{P}(A_1)\times\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\times\mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\times\cdots\times\mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$

— **Système complet (dénombrable) d'évènements** si :

$\Omega=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\mathcal{A}_n$ et, $\forall i\neq j,\ \mathcal{A}_i\cap\mathcal{A}_j=\emptyset$;

— **Formule des probabilités totales** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un s.c.e., avec $\mathbf{P}(A_i)>0,\forall i$, alors

$$\mathbf{P}(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}_{A_n}(B)\,\mathbf{P}(A_n)\,.$$

— **Formule de Bayes** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B)>0$ et $\mathbf{P}(A_i)>0,\forall i$, alors $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}_B(A_k)=\dfrac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}_{A_n}(B)\,\mathbf{P}(A_n)}$.

— cas évènements **incompatibles**, $\mathbf{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=\sum\mathbf{P}(A_n)$

— cas évènements **indépendants**, $\mathbf{P}(\cap A_n)=\prod\mathbf{P}(A_n)$ avec des familles finies; dans le cas général, c'est la formule des probabilités composées qui s'applique

— Pour $p\in]0,1[$, la **loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$ est la loi $\mathbf{P}$ sur$(\mathbb{N}^*,\mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$, définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(\{k\})=(1-p)^{k-1}p$$

Cette loi représente la loi de l'obtention d'un premier succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi de succès $b(p)$.

à venir : chapitre 10 : Espaces euclidiens

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8