Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. IX : Intégrales à paramètre

— **Méthode d'étude de l'intégrabilité** d'une fonction sur un intervalle : ensemble de continuité, techniques de comparaison ($\sim$, o, O) en les bornes impropres.

les étudiants doivent réviser le chapitre sur les intégrales généralisées et savoir étudier la convergence d'une intégrale généralisée

— **Théorème de continuité** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible]. Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A,\ f_{x,\bullet} : I \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux** sur I ;

ii) pour tout $t \in I,\ f_{\bullet,t} : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x,t)$ est **continue** sur A;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $\boxed{G : A \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est continue sur } A.}$

Généralisation au cas de domination (locale compacte) sur tous les segments d'un intervalle.

— **Théorème de dérivation** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].

Généralisation au cas de domination de $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ sur des ensembles du type $[a,b] \times J$.

— **Exemple de la fonction** Γ d'Euler

$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. *N.B. : tous doivent savoir montrer la continuité ou la classe $\mathcal{C}^1$ en exercice*

— **Théorème de dérivations successives** d'une intégrale à paramètre, pour obtenir la classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. [Admis]

— **Théorème de convergence dominée à paramètre continu :**
Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, a une borne de A, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$

ii) Pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \ell(t)$ sont c.p.m. sur I

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **intégrable** sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\boxed{\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t.}$

ch. X : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

— **produit scalaire**, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. **Norme associée** é un produit scalaire.

— Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires é l'aide des décompositions dans une base orthonormée.

Algorithme de Gram-Schmidt.

— **Théoréme de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance é un s.e.v. .

— **Orthogonal d'un s.e.v.**, Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux.

Dans E euclidien, pour F s.-e.v. de E, la somme $F + F^\perp$ est une **somme directe orthogonale** $\boxed{F \oplus^\perp F^\perp = E}$.

2) Isométries en dimension n

— **Isométrie vectorielle**.
Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)\,;\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \|\ \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**
Groupe des isométries : $\mathcal{O}(E)$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse.

— Caractérisation des isométries par la
Conservation du produit scalaire. **[preuve ⋆]**

— Caractérisation des isométries par la
Image d'une (de toute) base orthonormale

— Matrice orthogonale, inverse.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une
isométrie
ssi sa matrice dans une base orthonormée
est orthogonale. **[preuve ⋆]**

— **Groupe orthogonal** $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage é l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage é l'inverse.

— Stabilité de $F^\perp$ l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u.

à venir : chapitre 10 : isométries planes, théorème spectral, endomorphismes symétriques

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8