Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. X : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

— **produit scalaire**, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. **Norme associée** é un produit scalaire.

— Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires é l'aide des décompositions dans une base orthonormée.
Algorithme de Gram-Schmidt.

— **Théoréme de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance é un s.e.v. .

— **Orthogonal d'un s.e.v.**, Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux.
Dans E euclidien, pour F s.-e.v. de E, la somme $F + F^\perp$ est une **somme directe orthogonale** $\boxed{F \oplus^\perp F^\perp = E}$.

2) Isométries en dimension n

— **Isométrie vectorielle**.
Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)\,;\, \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \|\ \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**
Groupe des isométries : $\mathcal{O}(E)$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse.

— Caractérisation des isométries par la **Conservation du produit scalaire**. **[preuve ⋆]**

— Caractérisation des isométries par la **Image d'une (de toute) base orthonormale**

— Matrice orthogonale, inverse.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée** est orthogonale. **[preuve ⋆]**

— **Groupe orthogonal** $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage é l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage é l'inverse.

— Stabilité de $F^\perp$ l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u.

3) Isométries du plan

— Orientation du plan ou de l'espace, é l'aide du déterminant d'une matrice de passage.

— Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :
$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R_\theta$ matrice de rotation pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$; $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = S_\theta$ matrice de réflexion pour un réel θ si son déterminant vaut -1.

— Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire.

— On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

— **produit de matrices de rotations** de $SO_2(\mathbb{R})$. Composée de deux rotations planes.

— Classification des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions planes.

les étudiants peuvent savoir à titre culturel que les réflexions dans un espace euclidien sont les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan. Ecriture matricielle de la réflexion par rapport à F dans une base adaptée é la somme directe $E = F \oplus^\perp F^\perp$:
$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}$

4) Endomorphismes auto-adjoints

— **Endomorphisme auto-adjoint** : pour un endomorphsme u de E euclidien,
$u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E,\ < u(x)|y > = < x|u(y) >)$

— **Caractérisation des auto-adjoints** par l'**écriture matricielle** dans une base orthonormée.

— Si F est stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ l'est aussi. **[preuve ⋆]**

Les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont 2 à 2 orthogonaux

— **Théorème spectral** :
• tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est à **spectre réel** et est **diagonalisable** dans une **base orthonormée** de vecteurs propres.
• toute matrice **symétrique réelle** est à spectre réel et **diagonalisable dans une base orthonormée** :
Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $P^T S P = D$

— **Endomorphisme auto-adjoint positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si $\forall x \in E,\ < u(x)|x > \geq 0$

— **Endomorphisme auto-adjoint défini positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si
$\forall x \in E,\ x \neq 0_E \Rightarrow < u(x)|x > > 0$
Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$

— **Caractérisation spectrale des auto-adjoints** positifs ou définis positifs. Caractérisation spectrale des matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$

à venir : un projecteur est orthogonal ssi il est auto-adjoint

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8