Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. X : Isométries des espaces euclidiens

3) Isométries du plan

- Orientation du plan ou de l'espace, é l'aide du déterminant d'une matrice de passage.
- Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R_\theta$ matrice de rotation pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$; $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = S_\theta$ matrice de réflexion pour un réel θ si son déterminant vaut -1.
- Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire.
- On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- **produit de matrices de rotations** de $SO_2(\mathbb{R})$. Composée de deux rotations planes.
- Classification des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions planes.

  les étudiants peuvent savoir à titre culturel que les réflexions dans un espace euclidien sont les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan. Ecriture matricielle de la réflexion par rapport à F dans une base adaptée é la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$: $Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}$

4) Endomorphismes auto-adjoints

- **Endomorphisme auto-adjoint** : pour un endomorphsme u de E euclidien,
  $u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E, < u(x)|y >=< x|u(y) >)$
- **Caractérisation des auto-adjoints** par l'**écriture matricielle** dans une base orthonormée.
- Si F est stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^{\perp}$ l'est aussi. **[preuve ⋆]**

  Les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont 2 à 2 orthogonaux
- **Théorème spectral** :
  • tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est à **spectre réel** et est **diagonalisable** dans une **base orthonormée** de vecteurs propres.
  • toute matrice **symétrique réelle** est à spectre réel et **diagonalisable dans une base orthonormée** :
  Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $P^T SP = D$
- **Endomorphisme auto-adjoint positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si $\forall x \in E, < u(x)|x > \geq 0$
- **Endomorphisme auto-adjoint défini positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si
  $\forall x \in E,\ x \neq 0_E \Rightarrow < u(x)|x > > 0$
  Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- **Caractérisation spectrale des auto-adjoints** positifs ou définis positifs. Caractérisation spectrale des matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$
- Projecteurs orthogonaux.
  Caractérisation des projecteurs orthogonaux ce sont les projecteurs auto-adjoints.

ch. XI : Variables aléatoires, fonctions génératrices

- Variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,
- L'**image d'une v.a.** $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises
  La loi de X se note $\mathbb{P}_X$.
  $\boxed{\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\})}$, $\forall k \in X(\Omega)$
- **Variables aléatoires suivant une loi usuelle :**
  $\boxed{Unif([\![1, N]\!]), \mathcal{B}(p), \mathcal{B}(N, p), \mathcal{G}(p), \mathcal{P}(\lambda)}$
  les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

attention ! : pas d'interrogations orales la semaine du 24/02

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8