Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : V.A., fonctions génératrices

1) Espérance et Variance

— Variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,

— L'**image d'une v.a.** $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises

La loi de X se note $\mathbb{P}_X$.

$\boxed{\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\})}$, $\forall k \in X(\Omega)$

— **Variables aléatoires suivant une loi usuelle :**

$\boxed{Unif([\![1, N]\!]), \mathcal{B}(p), \mathcal{B}(N, p), \mathcal{G}(p), \mathcal{P}(\lambda)}$

les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

— Notation $X \sim Y$ lorsque X et Y ont même loi.

— Variable aléatoire image $Y = f(X)$ avec $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : R \to \mathbb{R}$.

— **Espérance** : $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}[X = x]$, lorsque $(x\mathbb{P}[X = x])$ sommable.

En pratique, X **v.a. discrète admet une espérance lorsque la série numérique** $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}[X = x_n]$ **est ACV**, et

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}[X = x_n].}$$

— Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}[X] = \lambda.$, Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$.

— **linéarité** de l'espérance. **Positivité**, **croissance**.

— Si X admet une espérance et est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X \geq n]$

— Théorème de **Transfert** :

$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}[X = x_n]$, lorsque $f(X)$ admet une espérance.

— **Variance**.

En pratique, X **v.a. discrète admet une variance lorsque** $\mathbb{E}[X^2]$ **existe et** $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$**.**

$\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X]$ **[preuve]**

2) Fonctions génératrices

— **Fonction génératrice** d'une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

$$\boxed{G_X : t \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X = k]\, t^k}$$

ou encore $\boxed{G_X : t \longmapsto \mathbb{E}\left[t^X\right]}$

les étudiants doivent connaître (et savoir calculer) **les expressions des (sommes des) fonctions génératrices pour les lois usuelles** $\boxed{b(p), B(N, p), P(\lambda), \mathcal{G}(p)}$. **points [preuves]**

• si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\boxed{G_X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}[X] = \lambda}$

• si $Y \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\boxed{G_Y : t \mapsto \frac{pt}{1 - (1 - p)t}}$ est définie sur $]-1/(1 - p), 1/(1 - p)[$, $\boxed{\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p},\ \mathbb{V}[X] = \frac{1 - p}{p^2}}$

• si $S \sim \mathcal{B}(N, p)$, alors $\boxed{G_S : t \mapsto (1 - p + pt)^N}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}[S] = Np, \quad \mathbb{V}[S] = Np(1 - p)}$

— Dans le cas d'une v;a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance ssi G_X est dérivable en 1, auquel cas, $\boxed{\mathbb{E}[X] = G'_X(1)}$ (admis, preuve non exigible)

— Dans le cas d'une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $\mathbb{E}(X^2)$ existe , alors $\boxed{\mathbb{E}[X] = G'_X(1)}$ et $\boxed{\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

— **Calcul des variances ou espérances des lois usuelles** par les séries génératrices : $\boxed{b(p), \mathcal{B}(N, p), \mathcal{P}(\lambda), \mathcal{G}(p)}$. **[preuves]**

— La fonction génératrice G_X caractérise la loi de $X : \Omega \to \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X = n] = \frac{G_X^{(k)}(0)}{n!}$

[preuves⋆]

— G_X est continue sur $[-1, 1]$, comme somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur $[-1, 1]$. **[preuves⋆]**

ch. XII : E.V.N., limites et continuité

1) Normes

— **Norme** sur un e.v.n.. Espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$.

— Définition (formules) des **normes usuelles** $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$ sur $E = \mathbb{R}^n$.

— **Produit scalaire**, norme associée à un produit scalaire, sur un espace préhilbertien réel.

— exemple $(M, N) \longmapsto \mathrm{Tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$M \longmapsto \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)}$ la norme associée.

— **Equivalence de normes**. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes [ADMIS].

— exemple $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

N.B. pour les interrogateurs/trices : les notions d'indépendances de variables aléatoirse n'ont pas été revues, le chapitre sur les couples ou suites de variables aléatoires et sur les lois conditionnelles sera vu plus tard.

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8