Devoir de sciences physiques n°5 *(2h)*

jeux de billes

Dans tout ce problème le champ de pesanteur supposé uniforme est noté $\vec{g}$ avec pour module $g=9,81\,m.s^{-2}$.
Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Chute dans l'air : mesure de la profondeur d'un puits *(barème sur 15 points)*

Dans cette partie on néglige les frottements de l'air .

Données: célérité du son dans l'air : $c=340\,m.s^{-1}$.

Pour mesurer la profondeur h d'un puits, on laisse tomber une bille de masse m=50g du bord du puits et l'on chronomètre la durée qui s'écoule entre le moment où on lâche la bille et le moment où on entend le bruit de l'impact de la bille au fond du puits (on a pris soin de placer l' oreille à hauteur du bord du puits). La durée mesurée est $t_h=2,6\,s$.

1. Établir l'expression littérale de l'équation vérifiée pas h en fonction des données.

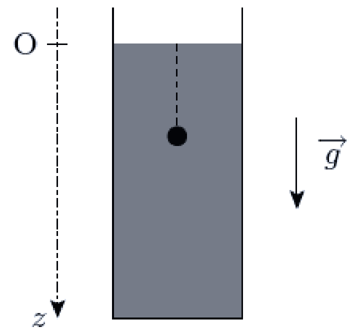
2. Calculer la profondeur h du puits.

B. Chute dans un liquide visqueux : mesure d'un coefficient de viscosité

(barème sur 25 points)

On considère une bille d'acier de masse volumique $\rho=7800\text{kg.m}^{-3}$ de rayon $r=5\text{mm}$. A t=0 cette bille est déposée sans vitesse initiale à la surface d'un tube rempli de glycérine.

La glycérine est un fluide visqueux de masse volumique $\rho_0=1260\text{kg.m}^{-3}$. On définit sa viscosité η par l'expression de la force de frottement $\vec{f}$ qu'elle exerce sur la bille quand celle-ci est en mouvement à la vitesse $\vec{v}$: $\vec{f}=-6\pi\eta r\vec{v}$.



On rappelle que d'après le principe d'Archimède , la résultante des forces de pression exercée par un fluide sur une sphère est l'opposée du poids de fluide déplacé par la sphère. Le volume d'une sphère de rayon r est : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

La position de la bille est repérée par son abscisse $z(t)$ mesurée à l'instant t sur l'axe Oz vertical descendant fixe dans le référentiel R d'étude supposé galiléen . L'origine de l'axe est choisie à la surface libre du liquide.

3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la bille dans la glycérine en fonction de ρ_0, ρ, r, $\vec{g}$, η et $\vec{v}$.

4. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$ s'écrit: $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}+\alpha\vec{v}=\beta\vec{g}}$ et donner les expressions des constantes α et β en fonction de ρ_0, ρ, r et η.

5. En admettant l'existence d'une vitesse limite $v_{\lim}$, montrer que celle-ci peut s'écrire: $\boxed{v_{\lim}=\frac{2(\rho-\rho_0)g}{9\eta}r^2}$

6. On mesure pour différentes valeurs de r la vitesse limite de la bille. Les mesures sont présentées dans le tableau ci-contre:

r (mm)	1,50	1,60	1,75	2,00	2,25
$v_{\lim}$ (cm.s^{-1})	5,2	5,9	7,1	9,1	11,5

En déduire en effectuant une régression linéaire la valeur de la viscosité η de la glycérine.

7. Donner l'expression de la constante de temps τ avec laquelle le mouvement uniforme s'établit. Faire l'application numérique pour $r=1,50\,mm$. Commenter.

C. Pendule : mesure d'une vitesse *(barème sur 35 points)*

On accroche une bille de masse m=200g au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur L=1m. On repère la position de la bille grâce à l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante. On lâche la bille avec une vitesse nulle le fil faisant un angle $\theta_0 = 30°$ avec la verticale descendante .

On suppose le fil tendu à tout moment.

8. Faire un schéma du dispositif en précisant les différents paramètres.

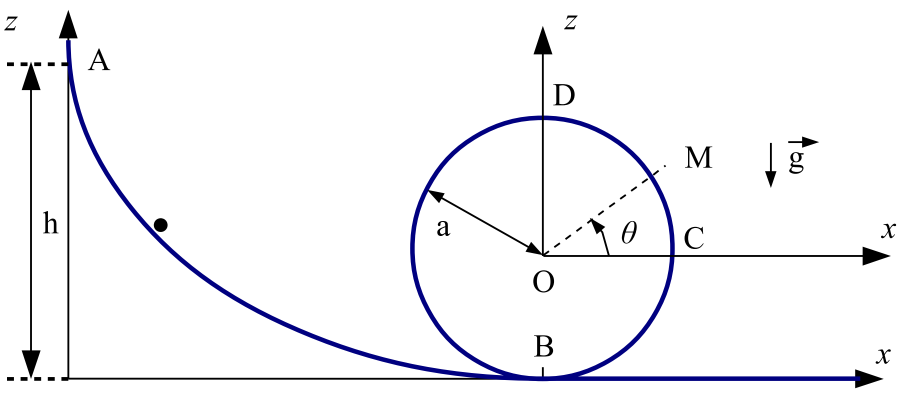
9. Montrer que le système est conservatif.

10. Établir l'expression de l'énergie mécanique $\boldsymbol{E_m}$ de la bille au cours de son mouvement en fonction de *v, m, L, g et θ.* En déduire l'expression de sa vitesse *v* en fonction de *L, g et θ.* Calculer la vitesse v_1 de la bille lors de son passage par la position verticale du fil.

11. De l'expression de $\boldsymbol{E_m}$ déduire l'équation différentielle du mouvement de la bille vérifiée par θ. La résoudre en faisant l'hypothèse des petits angles. En déduire la vitesse v_1' de la bille lors de son passage par la position verticale du fil en fonction de *L, g et θ₀*. Faire l'application numérique et conclure.

D. Condition pour effectuer un Looping *(barème sur 35 points)*

On considère dans cette partie un circuit constitué d'une glissière en partie circulaire comme l'indique la figure ci-dessous.



A t = 0 on lâche une bille de masse m=50g en A sans vitesse initiale, on cherche à déterminer la hauteur de chute minimale h_{min} pour que la bille effectue le looping constitué par la partie circulaire du circuit .
On suppose que la bille roule sans glisser et sans frottement.

12. Exprimer la vitesse V_B de la bille en B en fonction de *g* et *h*.

13. Exprimer la vitesse V_M de la bille en M en fonction de g, h, a et θ.

14. En ne tenant compte que du seul critère de vitesse, quelle serait la hauteur h_{min1} pour laquelle la bille effectuerait le looping

15. Soit $\vec{R}$ la réaction exercée par le circuit sur la bille.

a) Exprimer $\vec{R}$ en *M* en fonction de *g, h, m, a* et *θ.*

b) Pour quel point M_0 du cercle la norme de $\vec{R}$ est-elle minimale ?

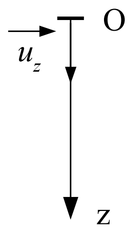
c) Donner l'expression littérale puis calculer la hauteur h_{min2} pour laquelle la bille effectuera le looping en ne tenant compte que de l'impact de la réaction sur le mouvement de la bille.

d) Conclure.

FIN DE L'ENONCE

Correction du devoir de sciences physiques n°5

Solution du A :



1. *Ref :* terrestre ;

Repère d'espace : $R(O,\vec{u}_z)$ tel que à t = 0 la bille est en O.

Base de projection : $(\vec{u}_z)$

Coordonnées : cartésiennes

Vecteurs cinématiques : $\vec{OM}=z\vec{u}_z$, $\vec{v}=\dot{z}\vec{u}_z$, $\vec{a}=\ddot{z}\vec{u}_z$

Bilan des forces : Poids : $\vec{P}=mg\vec{u}_z$

2ème loi de Newton : $m\vec{a}=\vec{P}$ d'où $\ddot{z}=g$ d'où par intégration en tenant compte des conditions initiales : $\boxed{z=\frac{1}{2}gt^2}$.

Pour parvenir à notre oreille le son met $t_1=\frac{h}{c}$. Le temps de chute est donc t_h-t_1 d'où :

$h=\frac{1}{2}g(t_h-t_1)^2=\frac{1}{2}g(t_h-\frac{h}{c})^2$ d'où $\frac{2h}{g}=t_h^2+\frac{h^2}{c^2}-\frac{2ht_h}{c}$ d'où : $\frac{h^2}{c^2}-2h(\frac{t_h}{c}+\frac{1}{g})+t_h^2=0$ d'où

$$\boxed{h^2-2c^2(\frac{t_h}{c}+\frac{1}{g})h+c^2t_h^2=0}.$$

2. AN : $h^2-2\times340^2(\frac{2,6}{340}+\frac{1}{9,81})h+340^2\times2,6^2=0$ d'où : $\boxed{h^2-25336h+781456=0}$.

Après résolution en ne gardant que la solution physiquement acceptable on trouve : $\boxed{h=31,4\,m}$.

Solution du B :

3. *Bilan des forces* :

Le poids : $\vec{P}=m\vec{g}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho\vec{g}$.

La poussée d'Archimède : $\vec{\pi}=-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0\vec{g}$.

La force de frottement : $\vec{f}=-6\pi\eta r\vec{v}$

4. On applique la 2ème loi de Newton à la bille : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{\pi}+\vec{f}$ or $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ d'où

$\frac{4}{3}\pi r^3\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{4}{3}\pi r^3\rho\vec{g}-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0\vec{g}-6\pi\eta r\vec{v}$ d'où $\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{g}-\frac{\rho_0}{\rho}\vec{g}-\frac{6\pi\eta r}{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}\vec{v}$ d'où

$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{9\eta}{2r^2\rho}\vec{v}=(1-\frac{\rho_0}{\rho})\vec{g}}$ par identification : $\boxed{\alpha=\frac{9\eta}{2r^2\rho}}$ et $\boxed{\beta=1-\frac{\rho_0}{\rho}}$.

5. Quand la bille a atteint sa vitesse limite $\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{0}$ d'où $\frac{9\eta}{2r^2\rho}\vec{v}_{\lim}=(1-\frac{\rho_0}{\rho})\vec{g}$ d'où $\boxed{v_{\lim}=\frac{2}{9\eta}(\rho-\rho_0)gr^2}$

6. Pour déterminer η on pose $Y=v_{\lim}$ et $X=\frac{2}{9}(\rho-\rho_0)r^2$ on a alors $Y=aX$ avec $a=\frac{1}{\eta}$.

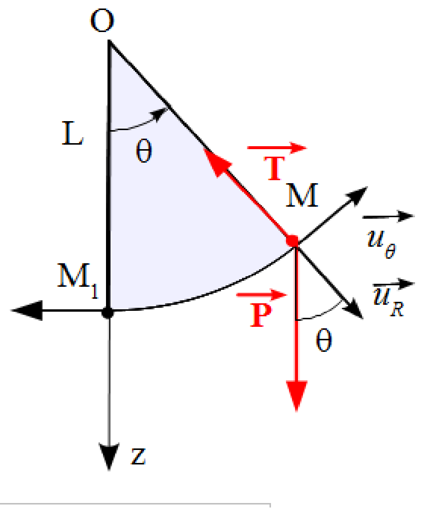
Après calculs on obtient le tableau suivant :

$X=\frac{2}{9}(\rho-\rho_0)r^2$	0,032	0,036	0,044	0,057	0,072
$Y=v_{\lim}$ en m.s^{-1}	0,052	0,059	0,071	0,091	0,110

La régression linéaire fournit l'équation de la droite $Y = aX + b$ avec a=1,5636, b=2,236.10^{-3} ≈ 0 et le coefficient de corrélation r²=0,9998> 0,99 qui valide le modèle. $\eta = \frac{1}{a} = \frac{1}{1{,}5636}$ d'où $\boxed{\eta = 0{,}640\ SI}$.

7. $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{2r^2\rho}{9\eta} = \frac{2(1{,}5.10^{-3})^2 7800}{9\times 0{,}64}$ d'où $\boxed{\tau = 6{,}09\ ms}$. La bille atteint presque instantanément sa vitesse limite.

Solution du C :



8. Voir ci-contre

9. On montre que le système est conservatif en faisant le bilan des forces :

La bille est soumis à son poids qui est une force conservative, et la tension du fil qui ne travaille pas. Conclusion : le système est conservatif $E_m = E_C + E_P = cste$.

10. L'énergie cinétique est : $E_C = \frac{1}{2}mv^2$

L' énergies potentielles est : $E_P = -mgz + cste = -mglcos\theta + mgl$ en prenant l'origine en O.

D'où l'expression de la conservation de l'énergie mécanique:

$\boldsymbol{Em = \frac{1}{2}mv^2 - mgLcos\theta + mgL}$.

$Em = Em(t=0) = \frac{1}{2}m0^2 - mgLcos(30°) + mgL = mgL(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ d'où $mgL(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}mv^2 - mgLcos\theta + mgL$

d'où $\boldsymbol{v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2})}}$ AN : $v_1 = \sqrt{2\times 9{,}81\times 1(cos0 - \frac{\sqrt{3}}{2})}$ d'où $\boldsymbol{v_1 = 1{,}62\ m.s^{-1}}$

11. $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ d'où $Em = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 - mgLcos\theta + mgL$. On obtient l'équation du mouvement en dérivant l'expression de E_m : $\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m\times 2(L^2\dot{\theta})\ddot{\theta} + \dot{\theta}mgL\sin\theta$ d'où $\boxed{L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$.

Dans le cadre des petits angles $\sin\theta = \theta$. L'équation devient : $\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. La solution est du type :

$\theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t$. A t = 0 $\theta(0) = \theta_0$ d'où $A = \theta_0$. A t = 0 $v(0) = 0$ d'où $B = 0$ d'où

$\boxed{\theta = \theta_0\cos\omega t}$ et $\boxed{v = L\dot{\theta} = -L\omega\theta_0\sin\omega t = -\sqrt{Lg}\,\theta_0\sin\omega t}$. Lorsque le fil est en position verticale $\theta = 0$ donc $\cos\omega t = 0$ d'où $\sin\omega t = \pm 1$ d'où $\boxed{v_1' = \sqrt{Lg}\,\theta_0}$. AN : $\boxed{v_1' = \frac{\sqrt{1\times 9{,}81}\times\pi}{6} = 1{,}63\ m.s^{-1}}$

Conclusion : avec ou sans approximation on trouve le même résultat à moins de 1% près.

Solution du D :

12. *Ref : terrestre*

On applique le théorème de l'énergie cinétique la bille entre le point A et le point B soit :

$\boldsymbol{E_C(B) - E_C(A) = W_{\vec{P}}(A \to B) + W_{\vec{R}}(A \to B)}$ (1)

$E_C(B) = \frac{1}{2}mV_B^2$; $E_C(A) = \frac{1}{2}mV_A^2 = 0$;

$W_{\vec{P}}(A \to B) = E_p(A) - E_p(B) = mgh - 0 = mgh$; $W_{\vec{R}}(A \to B) = 0$ car $\vec{R} \perp au\ déplacement$.

Donc d'après (1) $\frac{1}{2}mV_B^2 = mhg$ d'où $\boxed{V_B = \sqrt{2gh}}$

13. *On applique le théorème de l'énergie cinétique la bille entre le point A et le point M soit :*

$$\boldsymbol{E_C(M)-E_C(A)=W_{\vec{P}}(A\rightarrow M)+W_{\vec{R}}(A\rightarrow M)} \quad (1')$$

$$E_C(M)=\frac{1}{2}mV_M^2 \;;\; E_C(A)=\frac{1}{2}mV_A^2=0\;;$$

$$W_{\vec{P}}(A\rightarrow M)=E_p(A)-E_p(M)=mgh-mga(1+\sin\theta)\;;\; W_{\vec{R}}(A\rightarrow M)=0$$

Donc d'après (1') $\frac{1}{2}mV_M^2=mgh-mga(1+\sin\theta)$ d'où $\boxed{V_M=\sqrt{2gh-2ga(1+\sin\theta)}}$

14. En ne tenant compte que du critère de vitesse, pour que la bille puisse faire le looping il faut que $V_D>0$ soit $2gh>2ga\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)$ soit $\boxed{h_{min1}>2a}$.

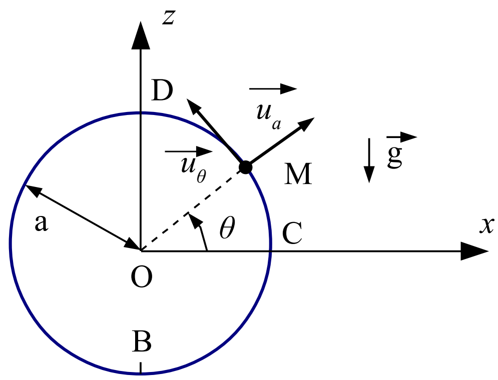
15. a) Pour pouvoir exprimer la réaction il faut appliquer la 2ème loi d Newton à la bille dans la partie circulaire du mouvement.

Repère d'espace : $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$

Base de projection la mieux adaptée : $(\vec{u}_a,\vec{u}_\theta)$,

Vecteurs cinématiques :

$\overrightarrow{OM}=a\vec{u}_a$, $\vec{v}=a\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}=-a\dot{\theta}^2\vec{u}_a+a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$



Bilan des forces :

Poids : $\vec{P}=-mg\sin\theta\vec{u}_a-mg\cos\theta\vec{u}_\theta$

Réaction du support : $\vec{R}=-R\vec{u}_a$

2ème loi d Newton : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}$ d'où par projection suivant $\vec{u}_a$:

$-am\dot{\theta}^2=-mg\sin\theta-R$ soit $R=am\dot{\theta}^2-mg\sin\theta$ or $V_M=a\dot{\theta}$ d'où $R=m\frac{V_M^2}{a}-mg\sin\theta$ en remplaçant V_M obtenu dans la question 13 on obtient : $R=m\frac{2gh-2ga(1+\sin\theta)}{a}-mg\sin\theta$ d'où

$$\boxed{R=mg\left(\frac{2h}{a}-2-3\sin\theta\right)}$$

b) R est minimale quand $\sin\theta$ est maximum c'est à dire en D.

c) Pour que la bille ne quitte pas le contact de la gouttière il faut que R (D) > 0 , on en déduit $\boxed{h_{min2}=\frac{5}{2}a}$.

d) $\boxed{h_{min2}>h_{min1}}$ on en déduit $\boxed{h_{min}=h_{min2}}$.