Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une $\boxed{\text{formule}}$ encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : V.A., fonctions génératrices

1) Espérance et Variance

— Notation $X \sim Y$ lorsque X et Y ont même loi.

— Variable aléatoire image $Y = f(X)$ avec $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : R \to \mathbb{R}$.

— **Espérance** : $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}[X = x]$, lorsque $(x\mathbb{P}[X = x])$ sommable.
En pratique, X v.a. discrète admet une espérance lorsque la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\mathbb{P}[X = x_n]$ est ACV, et
$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}[X = x_n].}$$

— **linéarité** de l'espérance. **Positivité**, **croissance**.

— Si X admet une espérance et est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X \geq n]$

— Théorème de **Transfert** :
$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}[X = x_n]$, lorsque $f(X)$ admet une espérance.

— **Variance**.
En pratique, X v.a. discrète admet une variance lorsque $\mathbb{E}[X^2]$ existe et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.
$\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X]$ **[preuve]**

2) Fonctions génératrices

— **Fonction génératrice** d'une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$.
$$\boxed{G_X : t \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X = k]\, t^k}$$
ou encore $\boxed{G_X : t \longmapsto \mathbb{E}\left[t^X\right]}$

les étudiants doivent connaître (et savoir calculer) **les expressions des (sommes des) fonctions génératrices pour les lois usuelles** $\boxed{b(p), B(N,p), P(\lambda), \mathcal{G}(p)}$. points **[preuves]**

• si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\boxed{G_X : t \mapsto e^{\lambda(t-1)}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}[X] = \lambda}$

• si $Y \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\boxed{G_Y : t \mapsto \dfrac{pt}{1-(1-p)t}}$ est définie sur $]-1/(1-p), 1/(1-p)[$, $\boxed{\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{p},\ \mathbb{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}}$

• si $S \sim \mathcal{B}(N,p)$, alors $\boxed{G_S : t \mapsto (1-p+pt)^N}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}[S] = Np, \quad \mathbb{V}[S] = Np(1-p)}$

— Dans le cas d'une v;a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance ssi G_X est dérivable en 1, auquel cas, $\boxed{\mathbb{E}[X] = G_X'(1)}$ (admis, preuve non exigible)

— Dans le cas d'une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $\mathbb{E}(X^2)$ existe , alors $\boxed{\mathbb{E}[X] = G_X'(1)}$ et $\boxed{\mathbb{V}[X] = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2}$

— **Calcul des variances ou espérances des lois usuelles** par les séries génératrices : $\boxed{b(p), \mathcal{B}(N,p), \mathcal{P}(\lambda), \mathcal{G}(p)}$. **[preuves]**

— La fonction génératrice G_X caractérise la loi de $X : \Omega \to \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}[X = n] = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{n!}$
[preuves⋆]

— G_X est continue sur $[-1,1]$, comme somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur $[-1,1]$. **[preuves⋆]**

T.S.V.P. ⟶

ch. XII : E.V.N., limites et continuité

1) Normes

- **Norme** sur un e.v.n.. Espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$.
- Définition (formules) des **normes usuelles** $\| \|_1, \| \|_2, \| \|_\infty$ sur $E = \mathbb{R}^n$.
- **Produit scalaire**, norme associée à un produit scalaire, sur un espace préhilbertien réel.
- exemple $(M, N) \longmapsto \mathrm{Tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  $M \longmapsto \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)}$ la norme associée.
- **Equivalence de normes**. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes [ADMIS].
- exemple $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
  [niveau ⋆] justifier à l'aide d'une suite (f_n) de fonctions que $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
- Distance associée à une norme sur un e.v.n..
- **Boule fermée**, **Boule unité fermée** , **Boule ouverte**.
  les étudiants doivent savoir dessiner les boules unités sur $\mathbb{R}^2$ pour les normes usuelles $\| \|_1, \| \|_2, \| \|_\infty$ **[pour tous]**
- **Partie bornée** de $(E, \| \|_E)$.
- **Suite bornée** $(V_n)_{n \geq 0}$ de vecteurs de $(E, \| \|_E)$.
- **Fonction bornée** $f : \Delta \to F$, de Δ partie de $(E, \| \|_E)$ vers $(F, \| \|_F)$.
- Définition de la limite d'une suite vectorielle, opérations usuelles : (V_n) converge vers L dans E ssi :
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0, \|V_n - L\|_E \leq \varepsilon$ **[pour tous]**

2) Limites, continuité

N.B. On se limitera à des fonctions de deux (voire trois) variables, à valeurs réelles ou vectorielles, en dimension finie.

- Point adhérent, adhérence **[niveau ⋆]**
- **Limite d'une fonction** en un point adhérent
  Critère séquentiel.
- Définition **Partie ouverte**
- Définition partie fermée. Une parte est fermée ssi son complémentaire est un ouvert.
- **continuité d'une fonction** de deux variables.
  $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue en $A \in \mathbb{R}^2$ ssi :
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0;\ \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$
  [pour tous]
- continuité d'une fonction $f : E \to F$, avec E, F e.v.n.
- **Partie fermée**
- **Théorème des bornes atteintes** pour une fonction continue sur un fermé borné : toute fonction continue sur une partie fermée et bornée y est bornée et atteint ses bornes.
- **Application lipschitzienne** $f : E \to F$ lorsqu'il existe $k \geq 0$ tel que :
  $$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$
- toute application linéaire en dimension finie est lipschitzienne donc continue.
- Continuité d'une application multilinéaire.

3) Topologie

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour f continue. **[pour tous]**
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) \geq 0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ pour f continue. **[pour tous]**
- point intérieur, **Intérieur** Δ° d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ **[utilisation niveau ⋆]**
- **adhérence** $\overline{\Delta}$ d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$
- Propriété des ouverts et fermés (stabilité des ouverts par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie; stabilité des fermés par intersection finie ou dénombrable et par réunion finie. **[utilisation niveau ⋆]**
- L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. **[utilisation niveau ⋆]**
- L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. **[utilisation niveau ⋆]**
- Partie convexe dans $\mathbb{R}^2$. **[utilisation niveau ⋆]**
- Partie dense. **[utilisation niveau ⋆]**

N.B. pour les interrogateurs/trices : les notions d'indépendances de variables aléatoirse n'ont pas été revues, le chapitre sur les couples ou suites de variables aléatoires et sur les lois conditionnelles sera vu plus tard.

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8