Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIII : Couples et suites de variables aléatoires

1) Couples de variables aléatoires

- **Couple de deux variables aléatoires, loi conjointe** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X, Y)) dans un tableau.
- **Lois marginales** $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.
- **Indépendance** de deux variables aléatoires.
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

  Application **[preuves⋆]** :

  Fonction génératrice d'une somme de deux variables indépendantes : si X et Y sont indépendantes, alors

  $$\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)}$$

  pour tout t appartenant aux deux intervalles ouverts de convergence des séries entières $\sum \mathbf{P}[X = k]\, t^k$ et $\sum \mathbf{P}[Y = k]\, t^k$.

  [preuves⋆]
- Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.
  $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right]$
  $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$
- **Si X et Y sont indépendantes**, alors

  $$\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$$

  [énoncé pour tous] **[preuve ⋆]**
- Variance d'une somme finie.
- **Coefficient de corrélation** $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.
- interprétation de $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Suites de variables alétoires

- **Indépendance (mutuelle)** d'une suite de variables aléatoires.

  Notion de suite (X_n) de v.a.i.i.d. (variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées).
- lemme des coalitions.

3) Comportement asymptotique

- Variable centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$. Variable réduite lorsque $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = 1$
- **Inégalité de Markov** si $\mathbb{E}[|X|]$ existe et est finie, alors :

  $$\boxed{\forall t > 0,\ \mathbb{P}\left[\{|X| \geq t\}\right] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}}$$

ch. XII : E.V.N., limites et continuité

1) Normes

- **[niveau ⋆]** justifier à l'aide d'une suite (f_n) de fonctions que $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
- Distance associée à une norme sur un e.v.n..
- **Boule fermée**, **Boule unité fermée** , **Boule ouverte**.

  les étudiants doivent savoir dessiner les boules unités sur $\mathbb{R}^2$ pour les normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ **[pour tous]**
- **Partie bornée** de $(E, \| \|_E)$.
- **Suite bornée** $(V_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de $(E, \| \|_E)$.
- **Fonction bornée** $f : \Delta \to F$, de Δ partie de $(E, \| \|_E)$ vers $(F, \| \|_F)$.
- Définition de la limite d'une suite vectorielle, opérations usuelles : (V_n) converge vers L dans E ssi :
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0, \|V_n - L\|_E \leq \varepsilon$ **[pour tous]**

2) Limites, continuité

N.B. On se limitera à des fonctions de deux (voire trois) variables, à valeurs réelles ou vectorielles, en dimension finie.

- Point adhérent, adhérence **[niveau ⋆]**
- **Limite d'une fonction** en un point adhérent

  Critère séquentiel.
- Définition **Partie ouverte**
- Définition partie fermée. Une parte est fermée ssi son complémentaire est un ouvert.
- **continuité d'une fonction** de deux variables.
  $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue en $A \in \mathbb{R}^2$ ssi :
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0;\ \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$
  [pour tous]
- continuité d'une fonction $f : E \to F$, avec E, F e.v.n.
- **Partie fermée**
- **Théorème des bornes atteintes** pour une fonction continue sur un fermé borné : toute fonction continue sur une partie fermée et bornée y est bornée et atteint ses bornes.
- **Application lipschitzienne** $f : E \to F$ lorsqu'il existe $k \geq 0$ tel que :

  $$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$
- toute application linéaire en dimension finie est lipschitzienne donc continue.
- Continuité d'une application multilinéaire.

T.S.V.P. ⟶

3) Topologie

— $\underline{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; f(x,y)>0\}}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour f continue. **[pour tous]**

— $\underline{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; f(x,y)=0\}}$ $\underline{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; f(x,y)\geq 0\}}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ pour f continue. **[pour tous]**

— point intérieur, **Intérieur** $\underline{\Delta^\circ}$ d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ **[utilisation niveau ⋆]**

— **adhérence** $\underline{\overline{\Delta}}$ d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$

— Propriété des ouverts et fermés (stabilité des ouverts par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie; stabilité des fermés par intersection finie ou dénombrable et par réunion finie. **[utilisation niveau ⋆]**

— L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. **[utilisation niveau ⋆]**

— L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. **[utilisation niveau ⋆]**

— Partie convexe dans $\mathbb{R}^2$. **[utilisation niveau ⋆]**

— Partie dense. **[utilisation niveau ⋆]**

à venir : inégalité de Bienaymé-Tchebychev, utilisation pour construire des intervalles de confiance.
Calcul différentiel

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8