Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIII : Couples et suites de variables aléatoires

1) Couples de variables aléatoires

- **Couple de deux variables aléatoires, loi conjointe** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X,Y)) dans un tableau.
- **Lois marginales** $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.
- **Indépendance** de deux variables aléatoires.
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

  Application **[preuves⋆]** :

  Fonction génératrice d'une somme de deux variables indépendantes : si X et Y sont indépendantes, alors

  $$\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)}$$

  pour tout t appartenant aux deux intervalles ouverts de convergence des séries entières $\sum \mathbf{P}[X = k]\, t^k$ et $\sum \mathbf{P}[Y = k]\, t^k$.

  [preuves⋆]
- Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.
  $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right]$
  $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
- **Si X et Y sont indépendantes**, alors

  $$\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$$

  [énoncé pour tous] **[preuve ⋆]**
- Variance d'une somme finie.
- **Coefficient de corrélation** $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.
- interprétation de $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Suites de variables alétoires

- **Indépendance (mutuelle)** d'une suite de variables aléatoires.

  Notion de suite (X_n) de v.a.i.i.d. (variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées).
- lemme des coalitions.

3) Comportement asymptotique

- Variable centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$. Variable réduite lorsque $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = 1$
- **Inégalité de Markov** si $\mathbb{E}[|X|]$ existe et est finie, alors :

  $$\boxed{\forall t > 0,\ \mathbb{P}\left[\{|X| \geq t\}\right] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}}$$

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** si $\mathbb{E}[X^2]$ existe et est finie, alors : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left[\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\}\right] \leq \dfrac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}}$

  [Interprétation, niveau ⋆] : lorsque (X_i) est une suite de v.a.i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2, $I =]\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon[$ est un intervalle de confiance pour la moyenne empirique $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, avec la probabilité de confiance minorée par $1 - \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

ch. XIV : Calcul différentiel

1) Rappels de PCSI

- **Dérivées partielles** en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

  Fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

  Généralisation à une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.

  fonctions dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
- La **classe** $\mathcal{C}^1$.
- Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in \mathcal{U}$:

  $$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o\left(h\right)}$$

- Vecteur **Gradient** $\overrightarrow{\nabla} f(M)$.

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :
Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8