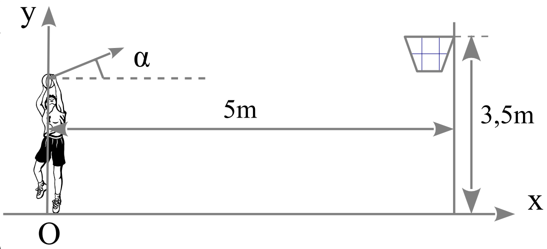
Dynamique en référentiel galiléen

1. Comment marquer un panier ☺☺



Un joueur de basket lance un ballon de masse m en lui communiquant une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale, en espérant atteindre le panier situé 5m plus loin.

A l'instant initial, le ballon a la coordonnée $(0,y_0)$ dans le repère $(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$ (voir schéma). On donne : m = 500 g et y_0 = 2,40 m et g = 10 m.s^{-2}

1. Déterminer les équations horaires x(t) et y(t).

2. Déterminer l'équation de la trajectoire y=f(x).

3. On suppose que V_0=10m.s^{-1}. Montrer qu'il existe deux valeurs de α (α_1 et α_2) permettant au joueur de marquer un panier.

4. Ecrire un programme python permettant de tracer les deux tirs possibles. Lequel est qualifié de tir en cloche, lequel est qualifié de tir tendu ?

5. On suppose qu'un adversaire situé en x_1=1,50m, tente de contrer le tir. Ce dernier peut atteindre la hauteur y_1=2,80m. Le joueur lançant le ballon a-t-il le choix entre les deux types de tirs pour que le ballon atteigne le panier tout en évitant l'adversaire ?

Rep Q3 : *α_1 = 73,86° et α_2 =28,54° (on pensera à utiliser la relation : $1/\cos^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$*

2. Mouvement d'une gouttelette d'eau de pluie *(d'après ENAC 2019)* ☺☺

Une gouttelette d'eau sphérique, de masse *m* et de diamètre *D*, tombe dans l'air en étant soumise à trois forces de direction verticale : son poids, la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$ et une force de frottement visqueux due à l'air $\overrightarrow{F_f}=-\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la gouttelette dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et $\alpha=3\pi\eta D$, η étant un paramètre caractéristique de l'air appelé viscosité. On précise qu'il n'est pas nécessaire de connaître cette grandeur pour résoudre le problème posé. On note $\vec{g}$ l'intensité de la pesanteur.

On donne la masse volumique de l'eau $\rho_e=1000\,kg.m^{-3}$ et celle de l'air $\rho_0=1\,kg.m^{-3}$.

1. A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité SI de η .

2. On néglige la poussée d'Archimède devant les deux autres forces. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la gouttelette s'écrit $\dfrac{d\vec{v}}{dt}+\dfrac{\vec{v}}{\tau}=\vec{g}$ et donner l' expression de la constante τ en fonction de *m* et α .

3. La poussée d'Archimède étant toujours négligée établir l'expression de $\vec{v}(t)$ en fonction de $\vec{g}$ et τ , on supposera la vitesse initiale nulle. En déduire la bonne expression parmi les propositions suivantes :

A) $\vec{v}(t)=\vec{g}\tau$ **B)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\tau\left(1+\exp(-\frac{t}{\tau})\right)$ **C)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\tau\left(1-\exp(-\frac{t}{\tau})\right)$ **D)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\tau\left(\exp(-\frac{t}{\tau})\right)$

4. On s'intéresse maintenant au vecteur position $\vec{r}$ de la gouttelette. La poussée d'Archimède étant toujours négligée, déterminer $\vec{r}(t)$, en fonction de $\vec{g}$ et τ , sachant que la position initiale de la gouttelette est nulle.

5. Exprimer en fonction de *D*, η , ρ_e et *g*, la vitesse limite v_l de la goutte, puis calculer sa valeur approximative. On donne $D=10\,\mu m$; $\eta\approx2\times10^{-5}\,SI$ et $g=10\,m.s^{-2}$.

6. On s'intéresse désormais à l'influence de la poussée d'Archimède sur la valeur de v_l. Déterminer l'écart relatif $\dfrac{|v_{l,A}-v_l|}{v_{l,A}}$ en pourcentage , entre la vitesse limite $v_{l,A}$ obtenue en tenant compte de la poussée d'Archimède et la vitesse limite v_l obtenue en la négligeant.

3. Glissade sur un toboggan ☺☺

Un enfant de masse m=20kg se laisse glisser sur le toboggan, modélisé ci-contre *(le schéma n'est pas à l'échelle)*.

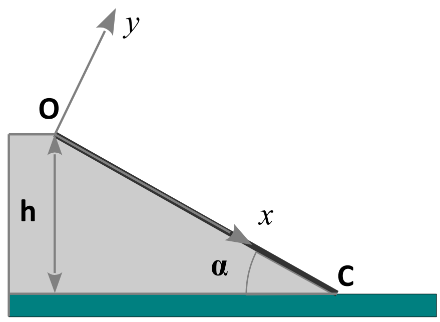
On néglige les frottements de l'air.

Le toboggan exerce sur l'enfant une réaction $\vec{R}$.

On note $\overrightarrow{R_T}$ sa composante tangentielle et $\overrightarrow{R_N}$ sa composante normale.

Les 2 composantes obéissent à la loi du frottement solide , c'est à dire que lors du mouvement: $\|\overrightarrow{R_T}\|=f\,\|\overrightarrow{R_N}\|$ avec *f* une constante.

On pose $R_T=\|\overrightarrow{R_T}\|$ et $R_N=\|\overrightarrow{R_N}\|$.



L'enfant part à t = 0 en O avec la vitesse v_0= 0,5m.s^{-1}.

La hauteur de chute est *h* =3m et l'angle *α* = 45°.

1) Déterminer l'équation horaire du mouvement de l'enfant *x*(t) en fonction de *g*, *f α et v_0* .

2) Le temps de parcours sur le toboggan entre O et C est τ = 1,2 s, en déduire f et la vitesse à laquelle l'enfant arrive en C.

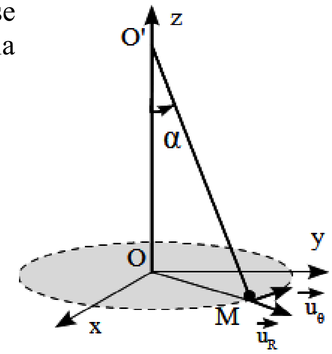
3) Quelle serait la vitesse d'arrivée s'il n'y avait pas de frottements ?

Rep :2) $f=\tan\alpha+2\left(\dfrac{v_0\tau-d}{\cos\alpha\, g\,\tau^2}\right)$

4. Pendule conique ☺☺☺

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil de longueur L inextensible et de masse négligeable attaché en un point fixe O' de l'axe Oz. M décrit un cercle de rayon R de centre O à la vitesse angulaire ω constante dans le plan *Oxy (figure ci-contre)*.

En utilisant la base de projection $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:



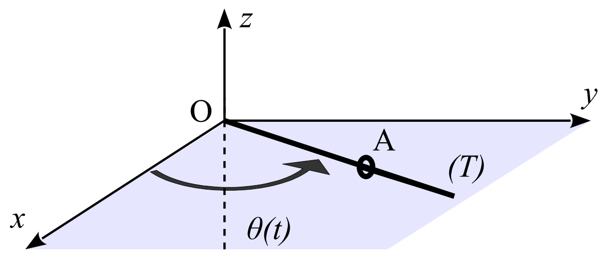
a) Calculer la tension du fil.
b) Calculer l'inclinaison α du fil par rapport à la verticale. *Rep: cosα=g/(Lω²).*
c) A quelle condition sur ω ce mouvement peut-il avoir lieu ?
Rep: T=Lω²m

5. Mouvement d'un anneau sur une tige en rotation ☺☺☺

Dans le référentiel *R(O, x, y, z)* supposé galiléen une tige *(T)* de longueur L est soudée à l' axe vertical *Oz* en O comme l'indique la figure ci-contre.

Elle tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour cet axe tout en restant dans le plan *(O, x, y)* horizontal.

Un anneau A de masse m enfilé sur la tige est abandonné sans vitesse initiale à la distance L/2 de l'axe, il glisse sans frottement sur la tige. On repère le point A grâce à ses coordonnées polaires (r, θ).



1) Reproduire le schéma et représenter la base polaire.
2) Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'anneau, exprimer leurs coordonnées dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
3) En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau sur la tige.
4) Déterminer la durée τ au bout de laquelle l'anneau atteint l'extrémité de la tige.
5) Déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur l'anneau en fonction du temps.

Rep:3) $\ddot{r}-\omega^2 r=0$; 2) $\tau=\frac{1}{\omega}\ln(2+\sqrt{3})$

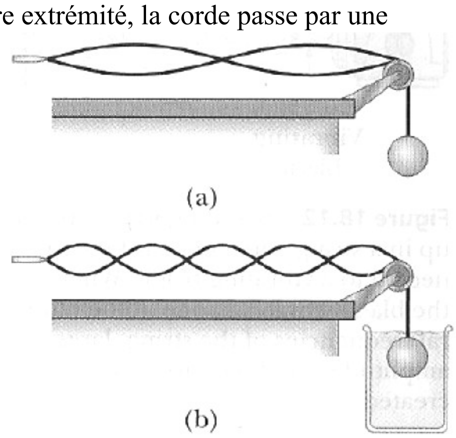
6. Résolution de problème : Corde vibrante et rayon d'une sphère ☺☺☺

Une corde horizontale est attachée à l'une de ses extrémités par une lame vibrante. À l'autre extrémité, la corde passe par une poulie et est reliée à une sphère de masse m = 2, 00 kg. La corde oscille selon le mode propre de rang 2 (seconde harmonique).

Ensuite la sphère est totalement immergée dans un récipient d'eau. Dans cette configuration, la corde oscille selon le mode propre de rang 5.

Que vaut le rayon R de la sphère ?

Donnée : La célérité d'une onde dans une corde vibrante est donnée par $c=\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, où T est la tension de la corde et μ sa masse par unité de longueur.



(a) (b)