

**3. Pendule : mesure d'une vitesse**

1. Voir ci-contre.

2. On montre que le système est conservatif en faisant le bilan des forces :

La bille est soumise à son poids qui est une force conservative, et la tension du fil qui ne travaille pas. Conclusion : le système est conservatif

$$E_m = E_c + E_p = cste .$$

3. L'énergie cinétique est :  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

L'énergie potentielle est :  $E_p = -mgz + K = -mgl \cos \theta + mgl$  en prenant l'origine en  $M_1$ .

D'où l'expression de la conservation de l'énergie mécanique:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - mgL \cos \theta + mgL .$$

$$E_m = E_m(t=0) = \frac{1}{2} m 0^2 - mgL \cos(30^\circ) + mgL = mgL(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ d'où } mgL(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} m v^2 - mgL \cos \theta + mgL$$

$$\text{d'où } v = \sqrt{2gL(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$\text{AN : } v_1 = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1 (\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2})} \text{ d'où } v_1 = 1,62 \text{ m.s}^{-1}$$

4.  $\vec{v} = L \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  d'où  $E_m = \frac{1}{2} m (L \dot{\theta})^2 - mgL \cos \theta + mgL$  . On obtient l'équation du mouvement en dérivant

l'expression de  $E_m$  :  $\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2} m \times 2 (L^2 \dot{\theta}) \ddot{\theta} + \dot{\theta} m g L \sin \theta$  d'où  $L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$  .

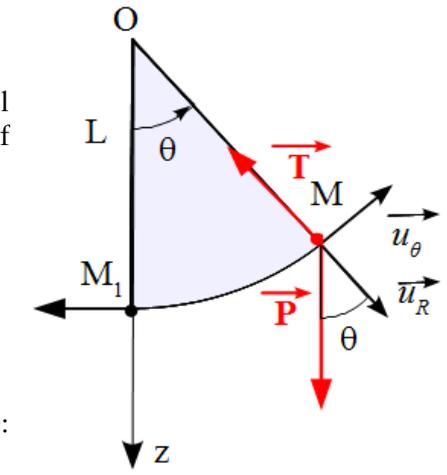
Dans le cadre des petits angles  $\sin \theta = \theta$  . L'équation devient :  $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$  . La solution est du type :

$$\theta = A \cos \omega t + B \sin \omega t . \text{ A } t=0 \theta(0) = \theta_0 \text{ d'où } A = \theta_0 . \text{ A } t=0 v(0) = 0 \text{ d'où } B = 0 \text{ d'où}$$

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t \text{ et } v = L \dot{\theta} = -L \omega \theta_0 \sin \omega t = -\sqrt{Lg} \theta_0 \sin \omega t . \text{ Lorsque le fil est en position verticale}$$

$$\theta = 0 \text{ donc } \cos \omega t = 0 \text{ d'où } \sin \omega t = \pm 1 \text{ d'où } v'_1 = \sqrt{Lg} \theta_0 . \text{ AN : } v'_1 = \frac{\sqrt{1 \times 9,81 \times \pi}}{6} = 1,63 \text{ m.s}^{-1}$$

**Conclusion :** avec ou sans approximation on trouve le même résultat à moins de 1% près.



#### 4. Voiture effectuant un looping

1. Ref : terrestre

a) On applique le théorème de l'énergie cinétique au chariot entre le point A et le point B soit :

$$E_C(B) - E_C(A) = W_{\vec{P}}(A \rightarrow B) + W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) \quad (1)$$

$$E_C(B) = \frac{1}{2} m V_B^2 ; E_C(A) = \frac{1}{2} m V_A^2 = 0 ;$$

$$W_{\vec{P}}(A \rightarrow B) = E_p(A) - E_p(B) = mgh - 0 = mgh ; W_{\vec{R}}(A \rightarrow B) = 0 \text{ car } \vec{R} \perp \text{au déplacement} .$$

Donc d'après (1)  $\frac{1}{2} m V_B^2 = mgh$  d'où  $V_B = \sqrt{2gh}$

b) On applique le théorème de l'énergie cinétique au chariot entre le point A et le point M soit :

$$E_C(M) - E_C(A) = W_{\vec{P}}(A \rightarrow M) + W_{\vec{R}}(A \rightarrow M) \quad (1')$$

$$E_C(M) = \frac{1}{2} m V_M^2 ; E_C(A) = \frac{1}{2} m V_A^2 = 0 ;$$

$$W_{\vec{P}}(A \rightarrow M) = E_p(A) - E_p(M) = mgh - mga(1 + \sin \theta) ; W_{\vec{R}}(A \rightarrow M) = 0$$

Donc d'après (1')  $\frac{1}{2} m V_M^2 = mgh - mga(1 + \sin \theta)$  d'où  $V_M = \sqrt{2gh - 2ga(1 + \sin \theta)}$ .

2. a) Pour pouvoir exprimer la réaction il faut appliquer la 2ème loi de Newton au point matériel dans la partie circulaire du mouvement.

Repère d'espace :  $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$

Base de projection la mieux adaptée :  $(\vec{u}_a, \vec{u}_\theta)$ ,

Vecteurs cinématiques :

$$\vec{OM} = a \vec{u}_a , \quad \vec{v} = a \dot{\theta} \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{a} = -a \dot{\theta}^2 \vec{u}_a + a \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Bilan des forces :

$$\text{Poids : } \vec{P} = -mg \sin \theta \vec{u}_a - mg \cos \theta \vec{u}_\theta$$

$$\text{Réaction du support : } \vec{R} = R \vec{u}_a$$

2ème loi de Newton :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$  d'où par projection suivant  $\vec{u}_a$  :

$$-a m \dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta - R \text{ soit } R = a m \dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \text{ or } V_M = a \dot{\theta} \text{ d'où } R = m \frac{V_M^2}{a} - mg \sin \theta \text{ en}$$

remplaçant  $V_M$  obtenu dans la question 13 on obtient :  $R = m \frac{2gh - 2ga(1 + \sin \theta)}{a} - mg \sin \theta$  d'où

$$R = mg \left( \frac{2h}{a} - 2 - 3 \sin \theta \right)$$

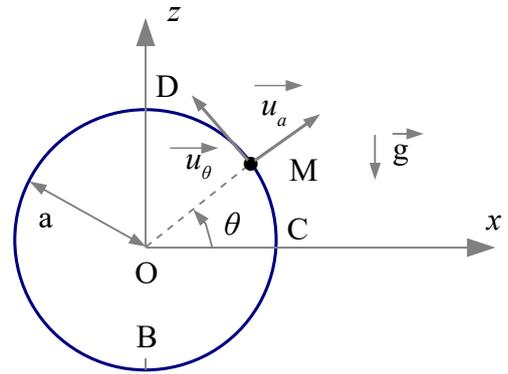
b) R est minimale quand  $\sin \theta$  est maximum c'est à dire en D.

c) Pour que le chariot ne quitte pas le contact des rails il faut que  $R(D) > 0$ , on en déduit  $h_{min} = \frac{5}{2} a$ .

Application numérique :  $h_{min} = 11,75 \text{ m}$

d) On veut que  $R(D) \geq \frac{mg}{4}$  d'où  $mg \left( \frac{2h}{a} - 2 - 3 \sin \frac{\pi}{2} \right) \geq \frac{mg}{4}$  d'où  $\frac{2h}{a} - 5 \geq \frac{1}{4}$  d'où  $\frac{2h}{a} \geq \frac{21}{4}$  d'où

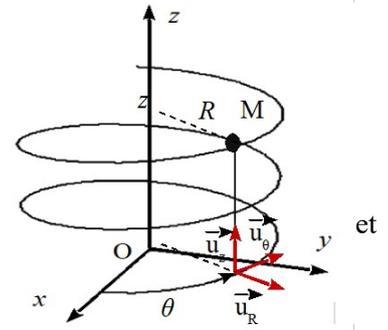
$$h_{min} = \frac{21}{8} a = 12,34 \text{ m}$$



## 6. Toboggan hélicoïdal

1. On utilise la relation  $z = \alpha \theta$ . On sait que pour  $z = h = 4\text{m}$  et

$$\theta = 2\pi n = 4,6\pi \text{ d'où : } \alpha = \frac{z}{\theta} = \frac{4}{4,6\pi} = 0,28 \text{ m.rad}^{-1}.$$



2. Ci-contre

3. On applique ce théorème de l'énergie mécanique à Paul entre le point de départ D le point d'arrivée S :  $E_m(S) - E_m(D) = W_{\vec{F}_{nc}}(D \rightarrow S)$

Au cours du mouvement, Paul est soumis à son poids dérivant de l'énergie potentielle :  $E_p = mgz$  en supposant l'énergie potentielle nulle en  $z=0$ .

Il est également soumis à la réaction  $\vec{R}$  du support orthogonale au déplacement, cette force ne travaille pas.

On déduit de ce bilan que  $E_m(S) - E_m(D) = W_{\vec{F}_{nc}}(D \rightarrow S) = 0$  (1)

$$E_m(D) = E_p(D) + E_c(D) = mgh + \frac{1}{2} m v_D^2 = mgh; \quad E_m(S) = E_p(S) + E_c(S) = 0 + \frac{1}{2} m v_S^2. \text{ De (1), on déduit que :}$$

$$v_S = \sqrt{2gh} = \sqrt{4 \times 4 \times 10} = 8,9 \text{ m.s}^{-1}$$

4. 1) En coordonnées cylindriques,  $\vec{OM} = R\vec{u}_r + z\vec{u}_z$  d'où  $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$  or  $z = \alpha\theta$  d'où  $\dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{\alpha}$  d'où :

$$\vec{v} = R \frac{\dot{z}}{\alpha} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z.$$

2) D'après le théorème de la puissance cinétique :  $\frac{dE_c}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v} + \vec{R} \cdot \vec{v}$  (2).

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [(R \frac{\dot{z}}{\alpha})^2 + \dot{z}^2] \text{ donc } \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} m [R^2 2 \dot{z} \frac{\ddot{z}}{\alpha^2} + 2 \dot{z} \ddot{z}] = m \dot{z} \ddot{z} [\frac{R^2}{\alpha^2} + 1]$$

$$\vec{P} \cdot \vec{v} = -mg \vec{u}_z \cdot (R \frac{\dot{z}}{\alpha} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z) = -mg \dot{z} \text{ et } \vec{R} \cdot \vec{v} = 0. \text{ De (2) on tire : } m \dot{z} \ddot{z} [\frac{R^2}{\alpha^2} + 1] = -mg \dot{z} \text{ d'où l'équation}$$

différentielle du mouvement :

$$\ddot{z} = \frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2} + 1]}.$$

3) Par intégration on obtient :  $\dot{z} = \frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2} + 1]} t + cste$  or à  $t=0$   $\dot{z} = 0$  donc  $cste = 0$  d'où  $\dot{z} = \frac{-g}{[\frac{R^2}{\alpha^2} + 1]} t$ . Par intégration on

obtient :  $z(t) = \frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2} + 1]} t^2 + cste$ . or à  $t=0$   $z = h$  donc  $cste = h$  d'où  $z(t) = \frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2} + 1]} t^2 + h$ .

La durée de descente est  $T_d$  telle que  $z(T_d) = 0$  soit  $0 = \frac{-g}{2[\frac{R^2}{\alpha^2} + 1]} T_d^2 + h$  d'où  $T_d = \sqrt{2[\frac{R^2}{\alpha^2} + 1] \frac{h}{g}}$ .

$$T_f = T_d + 5 = \sqrt{2[\frac{R^2}{\alpha^2} + 1] \frac{h}{g}} + 5 = \sqrt{2[\frac{2^2}{0,28^2} + 1] \frac{4}{10}} + 5 = 11,5 \text{ s}$$