Correction

1. Oscillations dans un cristal ☺☺

Dans un cristal, un atome de masse 10^{-26} *kg* effectue des oscillations harmoniques autour de sa position d'équilibre. La fréquence est égale à $f_0 = 10^{12}\,Hz$ et l'amplitude à $X_m = 0{,}05\,nm$. Déterminer :

1. Le module de la vitesse maximale.

2. Son énergie mécanique.

3. Le module de son accélération maximale.

4. La constante de rappel du ressort modélisant les oscillations.

Solution :

1. Lorsque la vitesse est maximale l'énergie potentielle est nulle ainsi $E_m = \frac{1}{2} m v_{max}^2$. Quand l'allongement est maximal égal à X_m l'énergie cinétique est nulle ainsi $E_m = \frac{1}{2} k X_m^2$. Au cours du temps, il y a conservation de l'énergie mécanique donc $\frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} k X_m^2$ d'où $v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} X_m = \omega_0 X_m$ or $\omega_0 = 2\pi f_0$ donc

$\boxed{\boldsymbol{v_{max} = 2\pi f_0 X_m}}$. *Application numérique* : $\boxed{\boldsymbol{v_{max} = 2\pi \times 10^{12} \times 0{,}05.10^{-9} = 314\, m.s^{-1}}}$

2. $E_m = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} m (2\pi f_0 X_m)^2$ donc $\boxed{\boldsymbol{E_m = 2m(\pi f_0 X_m)^2}}$.

Application numérique : $\boxed{\boldsymbol{E_m = 2\times 10^{-26} \times (\pi \times 10^{12} \times 0{,}05.10^{-9})^2 = 4{,}93.10^{-22}\, J}}$

3. l'accélération $a(t) = -\omega_0^2 x(t)$ donc son module est maximum quand *x(t)* est maximum donc

$\boxed{\boldsymbol{a_{max} = \omega_0^2 X_m = 4\pi^2 f_0^2 X_m}}$. *Application numérique* : $\boxed{\boldsymbol{a_{max} = 4\pi^2 10^{24} \times 0{,}05.10^{-9} = 1{,}97.10^{15}\, m.s^{-2}}}$

4. $\boxed{\boldsymbol{k = m\omega_0^2 = m\, 4\pi^2 f_0^2}}$. *Application numérique* : $\boxed{\boldsymbol{k = 10^{-26}\, 4\pi^2\, 10^{24} = 0{,}395\, N.m^{-1}}}$

2. Caractéristiques d'oscillations ☺☺

Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort de constante de raideur $k = 20{,}0\, N.m^{-1}$ et d'une masse m=200 g. A l'instant $t = 0$, la masse est écartée de $x_0 = 2{,}00\, cm$ de sa position d'équilibre avec la vitesse initiale $v_0 = 20{,}0\, cm.s^{-1}$.

1. Calculer la valeur de l'énergie mécanique totale de l'oscillateur à l'instant du lancement.

2. En déduire l'amplitude des oscillations ainsi que la vitesse de passage par la position d'équilibre.

Réponses : (E_m = 8 mJ ; X_m = 2,83 cm ; v_{max} = 28,3 cm/s)

Solution :

1. $\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2}}$ *Application numérique*: $E_m = \frac{1}{2} \times 0{,}2 \times 0{,}2^2 + \frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}02^2$ donc $\boxed{\boldsymbol{E_m = 8{,}00\, mJ}}$

2. $E_m = \frac{1}{2} k X_m^2$ donc $\boxed{\boldsymbol{X_m = \sqrt{2\frac{E_m}{k}}}}$

Application numérique: $X_m = \sqrt{\frac{2\times 8.10^{-3}}{20}}$ donc $\boxed{\boldsymbol{X_m = 2{,}83\, cm}}$

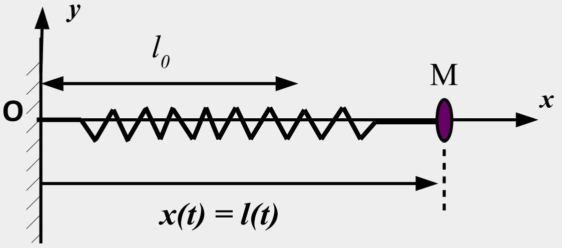
Lors du passage à la position d'équilibre toute l'énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique :

$E_m = \frac{1}{2} m v_{max}^2$ donc $\boxed{\boldsymbol{v_{max} = \sqrt{2\frac{E_m}{m}}}}$. **Application numérique:** $v_{max} = \sqrt{\frac{2\times 8.10^{-3}}{0{,}2}}$ donc $\boxed{\boldsymbol{v_{max} = 28{,}3\, cm.s^{-1}}}$.

3. Oscillations d'une perle ☺☺

Première partie

Une perle de masse $m=200\,g$ considérée comme ponctuelle peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale. Cette perle est attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de masse négligeable, de constante de raideur $k=12{,}0\ N.m^{-1}$ et le longueur à vide $l_0=30{,}0\,cm$ comme l'indique la figure ci-contre. Le point d'attache du ressort noté O est fixe et sert d'origine à l'axe Ox.



A t=0, on tire le ressort d'une quantité $X_0=12\,cm$ **par rapport à sa position d'équilibre** et on lâche la perle sans vitesse initiale.

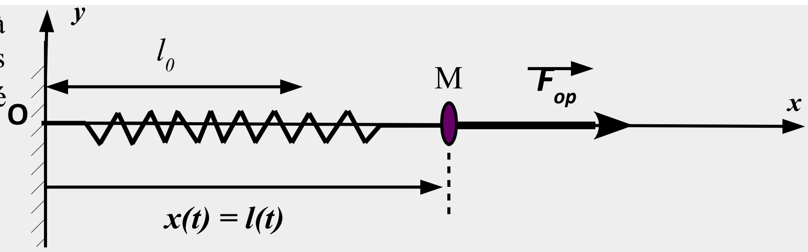
1. Établir l'équation différentielle du mouvement de la perle vérifiée par son abscisse *x(t)* correspondant à la longueur du ressort . En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations puis résoudre l'équation.

2. Représenter *x(t)* sur 2 périodes. Préciser l'amplitude des oscillations et la valeur moyenne de *x(t)*.

3. Calculer l'énergie cinétique de la perle quand elle passe par sa position d'équilibre.

Deuxième partie

La perle est initialement au repos et on applique à partir d'un instant pris comme origine des temps une force $\overrightarrow{F_{op}}=F\,\overrightarrow{u_x}$ constante comme indiqué sur le schéma ci-contre.



4. Établir l'équation différentielle du mouvement de la perle vérifiée par son abscisse *x(t)* correspondant toujours à la longueur du ressort . En déduire la pulsation propre ω_0 des oscillations puis résoudre l'équation et déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $x(t)=\frac{F}{k}\left(1-\cos(\omega_0 t)\right)+l_0$ B) $x(t)=\frac{F}{k}\sin(\omega_0 t)+l_0$

C) $x(t)=\frac{F}{m}\left(1+\cos(\omega_0 t)\right)+l_0$ D) $x(t)=\frac{F}{k}\left(\cos(\omega_0 t)-1\right)+l_0$

5. L'énergie mécanique de la perle au cours de son mouvement est définie comme la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle élastique. Etablir l'expression de l'énergie mécanique de la perle. Quelle est la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $E_m=\frac{1}{2}k\,l_0^2$ B) $E_m=\frac{F^2}{k}\left(1-\cos(\omega_0 t)\right)$ C) $E_m=\frac{F^2}{m}\frac{t^2}{2}$ D) $E_m=\frac{kF}{2k}\cos^2(\omega_0 t)$

6. A $t=\tau$, on cesse d'appliquer la force $\overrightarrow{F_{op}}$. Déterminer l'amplitude X_m des oscillations ultérieures en fonction de τ puis déterminer la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

A) $X_m=\frac{F}{k}\left|\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)\right|$ B) $X_m=l_0+\frac{F}{k}\cos\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)$ C) $X_m=2\frac{F}{k}\left|\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)\right|$ D) $X_m=\frac{F}{k}\cos(\omega_0\tau)$

7. Calculer la valeur numérique minimale de τ qui assure des oscillations d'amplitude maximale. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées ci-après.

A) $\tau=0{,}4\,s$ B) $\tau=15s$ C) $\tau=0{,}08\,s$ D) $\tau=2s$

8. Calculer alors le travail $W_{\overrightarrow{F_{op}}}$ fourni par la force $\overrightarrow{F_{op}}$ entre t=0 et $t=\tau$. Choisir la bonne réponse parmi celles proposées ci-après.

A) $W_{\overrightarrow{F_{op}}}=F\,l_0$ B) $W_{\overrightarrow{F_{op}}}=2F\,l_0$ C) $W_{\overrightarrow{F_{op}}}=\frac{2F^2}{k}$ D) $W_{\overrightarrow{F_{op}}}=\frac{F^2}{k}$

9. Lors de l'expérience, on constate que l'amplitude des oscillations dans la deuxième phase du mouvement est divisée par 2 après 25 oscillations. En supposant que le frottement est de type fluide (force proportionnelle à la vitesse), évaluer le facteur de qualité Q de cet oscillateur.

Solution *(d'après ENAC 2012)*

1. *Ref d'étude:* ref terrestre, *repère d'espace associé:* $\boldsymbol{R(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y)}$

Système: perle de masse m, *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)*

Base de projection: $(\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, *Vecteurs cinématiques*: $\vec{OM}=x\vec{u}_x$ $\vec{v}=\dot{x}\vec{u}_x=v\vec{u}_x$ $\vec{a}=\ddot{x}\vec{u}_x$ *(y=0)*

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R}=R\vec{u}_y$ orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de Hooke (force de rappel du ressort): $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}_x=-k(x-l_0)\vec{u}_x$

2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}$
- Par projection sur l'axe ox: $m\ddot{x}=-kx+kl_0$ d'où $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2l_0}$ avec $\omega_0=\sqrt{k/m}$ la pulsation propre des oscillations.
- La solution est de la forme: $\boxed{x(t)=x_h(t)+x_p(t)=A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t)+l_0}$.

Exploitation de la première condition initiale :

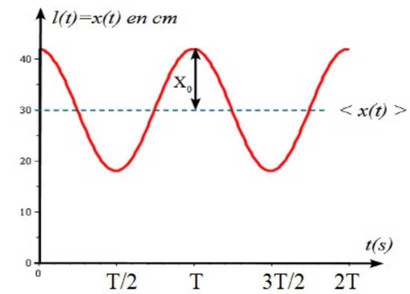
D'après la solution $x(0)=A+l_0$ or $x(0)=l_0+X_0$ donc $\boldsymbol{A=X_0}$.

*Exploitation de la deuxième condition initiale :*On calcule la dérivée de x(t) pour exprimer la vitesse de la masse pour tout t : $\dot{x}(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0t)+B\omega_0\cos(\omega_0t)$.

D'après cette équation $\dot{x}(0)=B\omega_0$ or $\dot{x}(0)=0$ donc $\boldsymbol{B=0}$. *d'où* $\boxed{x(t)=X_0\cos(\omega_0t)+l_0}$.

Applications numériques : $\omega_0=\sqrt{k/m}=\sqrt{12/0,2}=7,75\,rad.s^{-1}$ *donc* $\boxed{x(t)=12\cos(7,75t)+30\,cm}$.

2. *Représentation graphique sur 2 périodes:*



La période des oscillations est : $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=0,81\,s$

L'amplitude des oscillations est $X_0=12\,cm$.

La valeur moyenne est $<x(t)>=30\,cm$

3. La bille n'est soumise qu'à des forces conservatives. Son énergie mécanique $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ est constante au cours du mouvement on ne tient pas compte de l'énergie potentielle de pesanteur constante au cours du mouvement. Quand la perle passe par la position d'équilibre toute son énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique donc $E_c=E_m(t=0)=\frac{1}{2}kX_0^2$.

Application numérique : $\boxed{E_c=\frac{1}{2}\times12\times0,12^2=86,4\,mJ}$.

4. *Ref d'étude:* ref terrestre, *repère d'espace associé:* $\boldsymbol{R(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y)}$

Système: perle de masse m, *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)*

Base de projection: $(\vec{u}_x,\vec{u}_y)$, *Vecteurs cinématiques*: $\vec{OM}=x\vec{u}_x$ $\vec{v}=\dot{x}\vec{u}_x=v\vec{u}_x$ $\vec{a}=\ddot{x}\vec{u}_x=a\vec{u}_x$ *(y=0)*

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R}=R\vec{u}_y$ orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de Hooke (force de rappel du ressort): $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}_x=-k(x-l_0)\vec{u}_x$
- Force $\vec{F}_{op}=F\vec{u}_x$

2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}+\vec{F}_{op}$

- Par projection sur l'axe ox: $m\ddot{x}=-kx+kl_0+F$ d'où $\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=\omega_0^2 l_0+\frac{F}{m}}$ avec $\omega_0=\sqrt{k/m}$ la pulsation propre des oscillations.
- La solution est de la forme: $\boxed{x(t)=x_h(t)+x_p(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+l_0+\frac{F}{m\omega_0^2}}$.

Exploitation de la première condition initiale :

D'après la solution $x(0)=A+l_0+\frac{F}{m\omega_0^2}$ or $x(0)=l_0$ donc $A=-\frac{F}{m\omega_0^2}$.

*Exploitation de la deuxième condition initiale :*On calcule la dérivée de x(t) pour exprimer la vitesse de la masse pour tout t : $\dot{x}(t)=-A\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t)$.

D'après cette équation $\dot{x}(0)=B\omega_0$ or $\dot{x}(0)=0$ donc $B=0$. *d'où* $\boxed{x(t)=\frac{F}{m\omega_0^2}(1-\cos(\omega_0 t))+l_0}$ .or

$m\omega_0^2=k$ d'où $\boxed{x(t)=\frac{F}{k}(1-\cos(\omega_0 t))+l_0}$ **Rép A.**

5. $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k(x-l_0)^2=\frac{1}{2}m\frac{F^2\omega_0^2}{k^2}\sin^2(\omega_0 t)+\frac{1}{2}k\frac{F^2}{k^2}(1-\cos(\omega_0 t))^2$ or $\frac{\omega_0^2}{k}=\frac{1}{m}$ d'où

$E_m=\frac{1}{2}\frac{F^2}{k}(\sin^2(\omega_0 t)+(1-\cos(\omega_0 t))^2)=\frac{1}{2}\frac{F^2}{k}(2-2\cos(\omega_0 t))$ d'où $\boxed{E_m=\frac{F^2}{k}(1-\cos(\omega_0 t))}$. **Rép B.**

6. A partir du moment où l'on supprime la force , l'énergie mécanique se conserve. Lorsque le ressort est tiré au maximum , l' énergie cinétique de la perle est nulle d'où $\boxed{E_m=\frac{F^2}{k}(1-\cos(\omega_0\tau))=\frac{1}{2}kX_m^2}$ d'où

$\boxed{X_m^2=\frac{2F^2}{k^2}(1-\cos(\omega_0\tau))}$ d'où $\boxed{X_m=\frac{F}{k}\sqrt{2(1-\cos(\omega_0\tau))}}$. or cos 2x = cos²x-sin²x = 1-2 sin²x d'où

$\boxed{X_m=\frac{F}{k}\sqrt{4\sin^2(\frac{\omega_0\tau}{2})}=\frac{2F}{k}\left|\sin(\frac{\omega_0\tau}{2})\right|}$. **Rép C.**

7. L'amplitude des oscillations est maximale quand $\sin(\frac{\omega_0\tau}{2})=1$ soit pour la plus petite valeur de τ : $\frac{\omega_0\tau}{2}=\frac{\pi}{2}$.
D'où

$\boxed{\tau=\frac{\pi}{\omega_0}=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\pi\sqrt{\frac{0,2}{12}}=0,4\,s}$. **Rép A.**

8. La force $\vec{F}$ est une force constante donc $W_{\vec{F}}(x(0)\to x(\tau))=F\times[x(\tau)-x(0)]=\frac{F\times F}{k}(1-\cos(\omega_0\tau))$ or

$\omega_0\tau=\pi$ d'où $\boxed{W_{\vec{F}_{op}}=\frac{2F^2}{k}}$.**Rép C.**

9. Lors de frottement fluides les oscillations par rapport à la position d'équilibre sont régis par une quation du type :

$\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2 x=0$. Cette fois-ci $x=l-l_0$. La solution est du type : $x(t)=Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t+\phi)$. Le nombre d'oscillations étant important, on peut confondre pulsation propre et pseudo-pulsation. Ainsi pour t = 25 T₀ ,

$e^{-\frac{\omega_0}{2Q}25T_0}=\frac{1}{2}$ soit $\frac{\omega_0}{2Q}25T_0=\ln 2$ or $\omega_0 T_0=2\pi$ d'où $\boxed{Q=\frac{25\pi}{\ln 2}=113\approx 110}$.