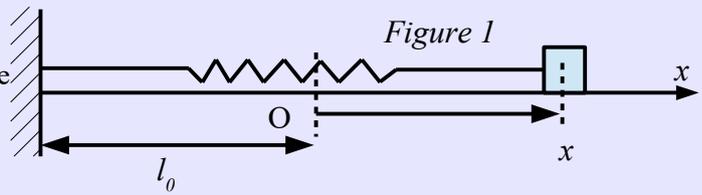


Correction

**6. Influence de l'amortissement ☺☺**

Une masse  $m=5\text{kg}$  attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur  $k=80\text{ SI}$  est en position d'équilibre. On tire cette masse de  $x_0=3\text{cm}$  et on la lâche sans vitesse initiale. On pose  $x(t)$  l'allongement du ressort. Le dispositif est représenté *figure 1*.



- Sachant que la masse est soumise à une force de frottement visqueux du type :  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ , déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse en  $x(t)$ .
- Résoudre l'équation et déterminer l'équation horaire  $x(t)$  du mouvement ainsi que le temps caractéristique  $\tau$  de la durée du régime transitoire dans les trois cas suivants :
  - La force d'amortissement vaut 50 fois la vitesse.
  - La force d'amortissement vaut 20 fois la vitesse.
  - Il n'y a pas de frottement.
- Quelle valeur de  $\lambda$  correspond au régime critique ? Quelle est alors l'équation horaire  $x(t)$  du mouvement et la durée du régime transitoire

**Solution**

1. Ref d'étude: ref terrestre repère d'espace associé  $R(\mathbf{0}, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  (l'origine est prise à la position d'équilibre)

Système: la masse - Coordonnées: cartésiennes  $(x, y)$  - Base de projection:  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

Vecteurs cinématiques:  $\vec{OM} = x \vec{u}_x$   $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$   $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x$  ( $y=0$ )

Bilan des forces:

- Poids:  $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_y$
- Réaction du support:  $\vec{R} = R \vec{u}_y$  R orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de rappel du ressort:  $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}_x = -k(l_0+x-l_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$
- Force de frottement :  $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$

Loi de la quantité de mouvement:

- $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}$
- Par projection sur les axes:  $m \ddot{x} = -kx - \lambda \dot{x}$  (1) et  $-mg + R = 0$  (2)

L'équation (1) conduit à (1'):

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

2. A l'équation (1') on associe l'équation caractéristique :  $r^2 + \frac{\lambda}{m} r + \frac{k}{m} = 0$ . La solution dépend du signe de son

discriminant :  $\Delta = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 4 \frac{k}{m}$ . (par la suite, il est plus simple de raisonner directement sur les applications numériques)

a)  $\lambda=50$  ;  $m=5\text{kg}$  ;  $k=8\text{SI}$ .

L'équation caractéristique est :  $r^2 + \frac{50}{5}r + \frac{80}{5} = 0$  en simplifiant :  $r^2 + 10r + 16 = 0$ .

$\Delta = (10)^2 - 4 \times 16 = 36 = 6^2 > 0$ . **Le régime est aperiodique.**

Les racines de l'équation sont  $x_1 = \frac{(-10-6)}{2} = -8$   $x_2 = \frac{(-10+6)}{2} = -2$ . La solution est du type :

$$x(t) = A e^{-8t} + B e^{-2t}$$

On détermine A et B grâce aux conditions initiales :  $x(0) = 3 = A + B$ . On calcule  $\dot{x}(t) = -8A e^{-8t} - 2B e^{-2t}$  d'où :  $\dot{x}(0) = 0 = -8A - 2B$ . On tire des deux équations précédentes :  $A = 4\text{cm} = 0,04\text{m}$  et  $B = -1\text{cm} = -0,01\text{m}$

Finalement :  $x(t) = 0,04 e^{-8t} - 0,01 e^{-2t}$  ( $x(t)$  exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est :  $\tau = \frac{1}{2} = 0,5 s$

b)  $\lambda = 20$  ;  $m = 5 \text{ kg}$  ;  $k = 8 \text{ SI}$ .

L'équation caractéristique est :  $r^2 + \frac{20}{5}r + \frac{80}{5} = 0$  en simplifiant :  $r^2 + 4r + 16 = 0$  .  $\Delta = (4)^2 - 4 \times 16 = -48 < 0$  .

**Le régime est pseudo-périodique.**

Les racines de l'équation sont  $x_1 = \frac{-4 - i\sqrt{48}}{2} = -2 - 2\sqrt{3}i = -2 - 3,46i$   $x_2 = -2 + 3,46i$  . La solution est du

type :  $x(t) = e^{-2t} [A \cos(3,46t) + B \sin(3,46t)]$  .

On détermine A et B grâce aux conditions initiales :  $x(0) = 3 = A$  . On calcule

$\dot{x}(t) = -2e^{-2t} [A \cos(3,46t) + B \sin(3,46t)] + e^{-2t} [-3,46A \sin(3,46t) + 3,46B \cos(3,46t)]$  d'où :

$\dot{x}(0) = 0 = -2A + 3,46B$  . On tire des deux équations précédentes :  $A = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$  et  $B = 1,7 \text{ cm} = 0,017 \text{ m}$

Finalement :  $x(t) = e^{-2t} [0,03 \cos(3,46t) + 0,017 \sin(3,46t)]$  ( $x(t)$  exprimé en m)

La durée caractéristique du régime transitoire est :  $\tau = \frac{1}{2} = 0,5 s$

c)  $\lambda = 0$  ;  $m = 5 \text{ kg}$  ;  $k = 8 \text{ SI}$ .

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique :  $\ddot{x} + 16x = 0$  .

Sa pulsation propre est :  $\omega_0 = \sqrt{16} = 4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  . **Le régime est sinusoïdal.**

La solution est du type :  $x(t) = [A \cos(4t) + B \sin(4t)]$  .

On détermine A et B grâce aux conditions initiales :  $x(0) = 3 = A$  . On calcule  $\dot{x}(t) = -4A \sin(4t) + 4B \cos(4t)$  d'où :  $\dot{x}(0) = 0 = 4B$  . On tire des deux équations précédentes :  $A = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$  et  $B = 0$

Finalement :  $x(t) = 0,03 \cos(4t)$  ( $x(t)$  exprimé en m)

Il n'y a pas de régime transitoire dans ce cas.

3. Le régime critique correspond au cas où  $\Delta = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 - 4 \frac{k}{m} = 0$  d'où :  $\lambda = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{1600} = 40$  . L'équation

caractéristique est :  $r^2 + \frac{40}{5}r + \frac{80}{5} = 0$  en simplifiant :  $r^2 + 8r + 16 = 0$  . La racine double est :  $x_1 = -4$  . La

solution est du type :  $x(t) = (A + Bt)e^{-4t}$  . On détermine A et B grâce aux conditions initiales :  $x(0) = 3 = A$  . On calcule  $\dot{x}(t) = Be^{-4t} - 4(A + Bt)e^{-4t}$  d'où :  $\dot{x}(0) = 0 = B - 4A$  . On tire des deux équations précédentes :

$A = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$  et  $B = 4A = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$

Finalement :  $x(t) = 0,01(1 + 4t)e^{-4t}$  ( $x(t)$  exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est :  $\tau = \frac{1}{4} = 0,25 s$  . Ce régime correspond au retour le plus rapide à la position d'équilibre.