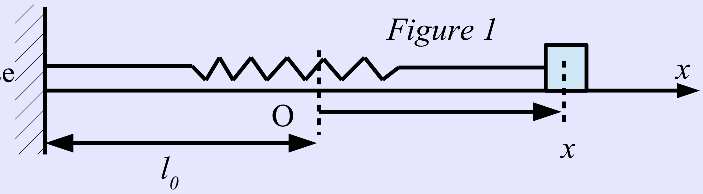
Correction

7. Influence de l'amortissement ☺☺

Une masse m=5kg attachée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur *k=80 SI* est en position d'équilibre. On tire cette masse de $x_0=3\text{cm}$ et on la lâche sans vitesse initiale. On pose *x(t)* l'allongement du ressort. Le dispositif est représenté *figure 1*.



1. Sachant que la masse est soumise à une force de frottement visqueux du type : $\vec{f}=-\lambda\vec{v}$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse en *x(t)*.

2. Résoudre l'équation et déterminer l'équation horaire *x(t)* du mouvement ainsi que le temps caractéristique τ de la durée du régime transitoire dans les trois cas suivants :

a) La force d'amortissement vaut 50 fois la vitesse.

b) La force d'amortissement vaut 20 fois la vitesse.

c) Il n'y a pas de frottement.

3. Quelle valeur de λ correspond au régime critique ? Quelle est alors l'équation horaire *x(t)* du mouvement et la durée du régime transitoire

Solution

1. *Ref d'étude:* ref terrestre repère d'espace associé $R(0,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ *(l'origine est prise à la position d'équilibre)*

Systéme: la masse - *Coordonnées* :cartésiennes *(x,y)* - *Base de projection*: $(\vec{u}_x,\vec{u}_y)$

Vecteurs cinématiques: $\overrightarrow{OM}=x\vec{u}_x$ $\vec{v}=\dot{x}\vec{u}_x$ $\vec{a}=\ddot{x}\vec{u}_x$ *(y=0)*

Bilan des forces:

- Poids: $\vec{P}=m\vec{g}=-mg\vec{u}_y$
- Réaction du support: $\vec{R}=R\vec{u}_y$ R orthogonale au déplacement car pas de frottements
- Force de rappel du ressort: $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}_x=-k(l_0+x-l_0)\vec{u}_x=-kx\vec{u}_x$
- Force de frottement : $\vec{f}=-\lambda\vec{v}=-\lambda\dot{x}\vec{u}_x$

Loi de la quantité de mouvement:

- $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}+\vec{f}$
- Par projection sur les axes: $m\ddot{x}=-kx-\lambda\dot{x}$ (1) et -mg+R=0 (2)
- L'équation (1) conduit à (1'): $\boxed{\ddot{x}+\frac{\lambda}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0}$.

2. A l'équation (1') on associe l'équation caractéristique : $r^2+\frac{\lambda}{m}r+\frac{k}{m}r=0$. La solution dépend du signe de son discriminant : $\Delta=(\frac{\lambda}{m})^2-4\frac{k}{m}$. *(par la suite, il est plus simple de raisonner directement sur les applications numériques)*

a) $\lambda=50$; m=5kg ; k=8SI.

L'équation caractéristique est : $r^2+\frac{50}{5}r+\frac{80}{5}=0$ en simplifiant : $r^2+10r+16=0$.

$\Delta=(10)^2-4\times16=36=6^2>0$. **<u>Le régime est apériodique.</u>**

Les racines de l'équation sont $x_1=\frac{(-10-6)}{2}=-8$ $x_2=\frac{(-10+6)}{2}=-2$. La solution est du type : $x(t)=Ae^{-8t}+Be^{-2t}$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A+B$. On calcule $\dot{x}(t)=-8\text{A}e^{-8t}-2\text{B}e^{-2t}$ d'où : $\dot{x}(0)=0=-8\text{A}-2\text{B}$. On tire des deux équations précédentes : $A=4\text{cm}=0{,}04m$ et $B=-1\text{cm}=-0{,}01m$

Finalement : $\boxed{x(t)=0{,}04e^{-8t}-0{,}01e^{-2t}}$ (*x(t)* exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau=\frac{1}{2}=0,5\,s}$

b) $\lambda=20$; m=5kg ; k=8SI.

L'équation caractéristique est : $r^2+\frac{20}{5}r+\frac{80}{5}=0$ en simplifiant : $r^2+4r+16=0$. $\Delta=(4)^2-4\times16=-48<0$.

Le régime est pseudo-périodique.

Les racines de l'équation sont $x_1=\frac{(-4-i\sqrt{48})}{2}=-2-2\sqrt{3}\,i=-2-3,46\,i$ $x_2=-2+3,46\,i$. La solution est du type : $x(t)=e^{-2t}[A\cos(3,46t)+B\sin(3,46t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A$. On calcule $\dot{x}(t)=-2e^{-2t}[A\cos(3,46t)+B\sin(3,46t)]+e^{-2t}[-3,46A\sin(3,46t)+3,46B\cos(3,46t)]$ d'où : $\dot{x}(0)=0=-2A+3,46B$. On tire des deux équations précédentes : $A=3\mathrm{cm}=0,03\,m$ et $B=1,7\,cm=0,017\,m$

Finalement : $\boxed{x(t)=e^{-2t}[0,03\cos(3,46t)+0,017\sin(3,46t)]}$ (*x(t)* exprimé en m)

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau=\frac{1}{2}=0,5\,s}$

c) $\lambda=0$; m=5kg ; k=8SI.

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique : $\boxed{\ddot{x}+16x=0}$.

Sa pulsation propre est : $\omega_0=\sqrt{16}=4\,rad.s^{-1}$. **Le régime est sinusoïdal.**

La solution est du type : $x(t)=[A\cos(4t)+B\sin(4t)]$.

On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A$. On calcule $\dot{x}(t)=-4A\sin(4t)+4B\cos(4t)$ d'où : $\dot{x}(0)=0=4B$. On tire des deux équations précédentes : $A=3\mathrm{cm}=0,03\,m$ et $B=0$

Finalement : $\boxed{x(t)=0,03\cos(4t)}$ (*x(t)* exprimé en m)

Il n'y a pas de régime transitoire dans ce cas.

3. Le régime critique correspond au cas où $\Delta=(\frac{\lambda}{m})^2-4\frac{k}{m}=0$ d'où : $\lambda=2\sqrt{km}=2\sqrt{1600}=40$. L'équation caractéristique est : $r^2+\frac{40}{5}r+\frac{80}{5}=0$ en simplifiant : $r^2+8r+16=0$. La racine double est : $x_1=-4$. La solution est du type : $x(t)=(A+Bt)e^{-4t}$. On détermine A et B grâce aux conditions initiales : $x(0)=3=A$. On calcule $\dot{x}(t)=Be^{-4t}-4(A+Bt)e^{-4t}$ d'où : $\dot{x}(0)=0=B-4A$. On tire des deux équations précédentes : $A=3\mathrm{cm}=0,03\,m$ et $B=4A=12\mathrm{cm}=-0,12\,m$

Finalement : $\boxed{x(t)=0,01(1+4t)e^{-4t}}$ (*x(t)* exprimé en m).

La durée caractéristique du régime transitoire est : $\boxed{\tau=\frac{1}{4}=0,25\,s}$. Ce régime correspond au retour le plus rapide à la position d'équilibre.