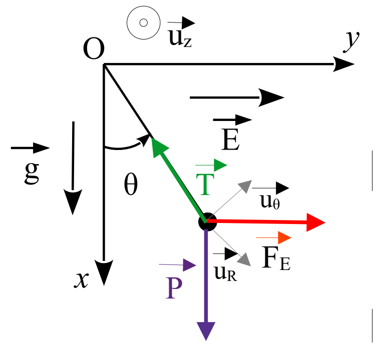
Théorème du moment cinétique_Correction

4. Pendule électrostatique ☺☺



1) Ci-contre

2) Système : Boule

Repère d'espace : $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$

Coordonnées : polaires (R, θ). Base de projection : $(\vec{u}_R,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$,

Vecteurs cinématiques : $\overrightarrow{OM}=R\vec{u}_R$, $\vec{v}=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{L}_0(M)=\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}=mR^2\dot{\theta}\vec{u}_z$

Bilan des forces et moments :

Poids : $\vec{P}=m\vec{g}=mg\cos\theta\,\vec{u}_R-mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta$, $\vec{M}_O(\vec{P})=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}=R\vec{u}_R\wedge(mg\cos\theta\,\vec{u}_R-mg\sin\theta\,\vec{u}_\theta)=-mgR\sin\theta\,\vec{u}_z$

Tension: $\vec{T}=-T\vec{u}_R$, $\vec{M}_O=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{T}=\vec{0}$

Force électrique: $\vec{F}_E=Q\vec{E}=QE\sin\theta\,\vec{u}_R+QE\cos\theta\,\vec{u}_\theta$,

$\vec{M}_O(\vec{F}_E)=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}_E=R\vec{u}_R\wedge(QE\sin\theta\,\vec{u}_R+QE\cos\theta\,\vec{u}_\theta)=QER\cos\theta\,\vec{u}_z$

D'après le théorème du moment cinétique en O (point fixe) : $\frac{d\vec{L}_O}{dt}=\vec{M}_O(\vec{P})+\vec{M}_O(\vec{T})+\vec{M}_O(\vec{F}_E)$ d'où

$mR^2\ddot{\theta}=-mgR\sin\theta+QER\cos\theta$ d'où $\boxed{mR\ddot{\theta}=-mg\sin\theta+QE\cos\theta}$.

3) A l'équilibre: $\ddot{\theta}=0$ d'où $-mg\sin\theta_e+QE\cos\theta_e=0$ d'où $\boxed{\tan\theta_e=\frac{QE}{mg}}$.

4) On pose $\theta=\theta_e+\varepsilon$ ainsi: $\ddot{\theta}=\ddot{\varepsilon}$. En remplaçant dans l'équation du mouvement , on obtient: $mR\ddot{\varepsilon}=-mg\sin(\theta_e+\varepsilon)+QE\cos(\theta_e+\varepsilon)$ or $\varepsilon\ll\theta_e$ d'où $\cos(\theta_e+\varepsilon)\approx\cos(\theta_e)-\varepsilon\sin(\theta_e)$ et $\sin(\theta_e+\varepsilon)\approx\sin(\theta_e)+\varepsilon\cos(\theta_e)$.

En remplaçant dans l'équation, on obtient : $mR\ddot{\varepsilon}=-mg(\sin\theta_e+\varepsilon\cos\theta_e)+QE(\cos\theta_e-\varepsilon\sin\theta_e)$ or

$-mg\sin\theta_e+QE\cos\theta_e=0$ d'où $mR\ddot{\varepsilon}=-mg\varepsilon\cos\theta_e-QE\varepsilon\sin\theta_e$ d'où $\boxed{\ddot{\varepsilon}+\left(\frac{g}{R}\cos\theta_e+\frac{QE}{mR}\sin\theta_e\right)\varepsilon=0}$.

L'équation obtenue est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\boxed{\omega_0^2=\left(\frac{g}{R}\cos\theta_e+\frac{QE}{mR}\sin\theta_e\right)}$

or $\sin\theta_e=\frac{QE}{mg}\cos\theta_e$ d'où $\omega_0^2=\left[\frac{g}{R}+\frac{1}{Rg}\left(\frac{QE}{m}\right)^2\right]\cos\theta_e$ d'où $\boxed{\omega_0^2=\left[1+\left(\frac{QE}{mg}\right)^2\right]\frac{g}{R}\cos\theta_e}$ d'où la période

$$\boxed{T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{R}{\left[1+\left(\frac{QE}{mg}\right)^2\right]g\cos\theta_e}}}$$