L'interaction gravitationnelle

1. Masse d'un astre ☺

Au cours de la mission APOLLO XVII en 1972, le module de commande en orbite circulaire autour de la lune à une distance de 2040 km du centre de celle-ci, avait une période de 8240 s dans le référentiel Sélénocentrique. Calculer la masse de la Lune.

2. Mission INTREGRAL ☺☺

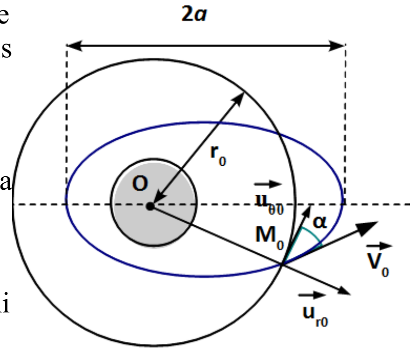
International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory (INTEGRAL) est un observatoire spatial d'astrophysique européen mis en orbite en 2002. Son orbite de travail est une ellipse passant de 9 000 km à 153 000 km au dessus de la Terre. La masse de l'observatoire est de $m = 3,5$ tonnes.

1) Déterminer le demi-grand axe a de l'orbite du satellite.
2) Calculer la période de révolution d'INTEGRAL.
3) Exprimer puis calculer l'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire elliptique.
4) Calculer la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique à son apogée et à son périgée.

3. lancement raté ☺☺

On désire effectuer le lancement d'un satellite de masse m_s de façon à avoir une orbite circulaire.
On suppose que le lancement du satellite est manqué et qu'au point d'injection sur orbite M_0 le vecteur vitesse a bien même module V_0 que pour l'orbite circulaire de rayon r_0 mais fait un angle $0 < \alpha < \pi/2$ avec la direction prévue. On notera r_0 la distance OM_0.

Le dispositif est représenté ci-contre.



1) Montrer que $V_0=\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$ où G est la constante de gravitation universelle, et M_T la masse de la terre.
2) Exprimer l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de m_s, G, M_T et r_0.
La trajectoire du satellite est nécessairement elliptique, pourquoi ? En déduire le demi grand axe a de l'ellipse.
3) Montrer grâce aux conditions initiales que la constante des aires caractérisant le mouvement du satellite est : $C=r_0v_0\cos\alpha$.
4) Montrer qu'au périgée et à l'apogée $Em=\frac{1}{2}m_s\frac{C^2}{r^2}-\frac{GM_Tm_s}{r}$ r étant la distance au centre O du périgée ou de l'apogée.
5) Déduire de la question précédente les distances r_P et r_A au centre O de la terre du périgée et de l'apogée de la trajectoire en fonction de r_0 et α. Rep: : $r_P=r_0(1-\sin\alpha)$, $r_A=r_0(1+\sin\alpha)$
6) Déduire de la question précédentes les vitesses V_A et V_P à l'apogée et au périgée.

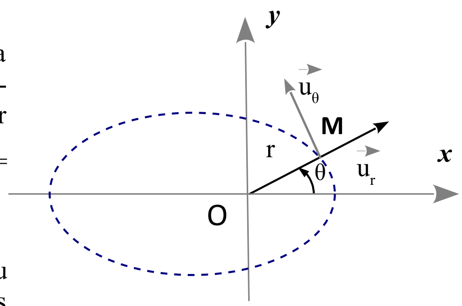
4. Trajectoire d'une comète ☺☺

On rappelle que la terre décrit autour du soleil une orbite quasi-circulaire de rayon R_0=150millions de km en T_0= 365,25 jours.

1) Exprimer la vitesse V_0 de la terre en fonction des données.
2) Une comète dont la trajectoire est coplanaire à l'orbite de la terre a une masse m_c. Son périhélie (point de sa trajectoire le plus proche du soleil) se trouve à la distance $R_0/2$du soleil et la vitesse de la comète en ce point est $2V_0$.
a) Grâce aux caractéristiques cinématiques de la comète au périhélie, montrer que son énergie mécanique est nulle, en déduire la nature de sa trajectoire .
b) Exprimer la vitesse v de la comète en fonction de sa distance r au centre du soleil. *Rep : $v=V_0(2R_0/r)^{1/2}$*

5. Mise en orbite géostationnaire ☺☺

Un satellite terrestre décrit une trajectoire elliptique dans le plan équatorial. On repère sa position grâce au point M de coordonnées polaires (r, θ). La trajectoire est représentée ci-contre. Le point O est le centre de la terre. En utilisant les coordonnées polaires définies sur le schéma, la trajectoire a pour équation : $\boldsymbol{r=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$ avec $e = 0,72$ l'excentricité et p = 11800 km le paramètre de l'ellipse.



1) Positionner l'apogée et le périgée sur le schéma.
2) En utilisant l'équation de la trajectoire, exprimer les rayons r_A et r_P de l'apogée et du périgée du satellite en fonction de p et e. Faire les applications numériques et calculer les altitudes correspondantes.
3) Montrer que la vitesse à l'apogée V_A peut se mettre sous la forme : $V_A=\sqrt{\frac{2GM_Tr_P}{r_A(r_A+r_P)}}$. En déduire l'expression V_P de la vitesse au périgée en fonction des mêmes paramètres. Faire l'AN. Quelle caractéristique principale a chacune de ces deux vitesses ?
4) Quelle variation de vitesse faut-il communiquer à l'apogée pour rendre le satellite géostationnaire ?

6. Mise sur orbite d'un satellite terrestre ☺☺

Le satellite EUTELSAT 8 West B d'une masse m = 5, 8 tonnes a été lancé de Kourou en Guyane française par une fusée Ariane 5 le 21 août 2015 afin d'être placé sur une orbite géostationnaire. La base de lancement de Kourou se situe à une latitude $\lambda = 5{,}2°$.

Dans le référentiel géocentrique R*g* supposé galiléen, la Terre peut-être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe fixe (l'axe Nord-Sud) à une vitesse angulaire Ω.

1) Décrire l'axe de rotation. Peut-on le considérer comme fixe ? Déterminer l'expression puis la valeur de Ω.

2) En déduire l'expression de la vitesse d'un point P de la surface de la terre à la latitude λ dans le référentiel géocentrique R*g* en fonction de Ω et du rayon de la Terre R_T .

3) Exprimer alors l'énergie mécanique initiale E_{m0} du satellite posé au sol au point P.

4) En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tir : Baïkonour au Kazakhstan (λ= 46°), Cap Canaveral aux USA (λ=28,5°) et Kourou en Guyane Française ($\lambda=5{,}2°$), lequel est le plus adapté ?

5) Montrer que l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse (altitude $z \ll R_T$) depuis une latitude λ *est :*

$$\Delta E = \frac{m R_T}{2}\left[g_0 - R_T \Omega^2 \cos^2 \lambda\right]$$

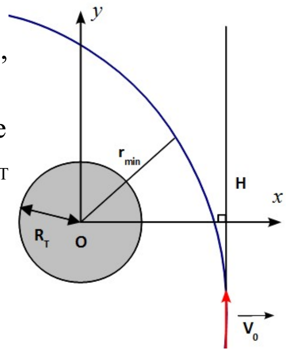
. Calculer cette énergie dans le cas d'un lancement depuis Kourou.

6) Sachant que 1 kW·h d'électricité coûte environ 0,15 euros, estimer le coût théorique de la satellisation d'un kilogramme de charge utile. Ce coût est en réalité de l'ordre de 1000 euros/kg. Commenter.

7) Calculer numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. Commenter.

<u>Données :</u> intensité de la pesanteur au niveau du sol $g_0 = 9{,}81 ms^{-2}$, $R_T = 6400$ *km*

7. Distance de plus courte approche ☺☺☺



Un météore, point matériel M de masse m négligeable devant la masse M_T de la Terre, de centre O , arrive de l'infini avec la vitesse v_0 par rapport à la Terre. M décrit une branche d'hyperbole de foyer O . Son paramètre d'impact est OH = b (voir la figure) . Calculer sa distance r_{min} de plus courte approche de la Terre, en fonction de v_0 , b , M_T , G constante de gravitation et R_T rayon de la Terre.

Rep : $r_{min} = -GM_T/v_0^2 + [\,(GM_T/v_0^2)^2 + b^2\,]^{1/2}$

<u>Données:</u> masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}$ *kg* , constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ *SI* , rayon de la Terre $R_T = 6400$ *km*.