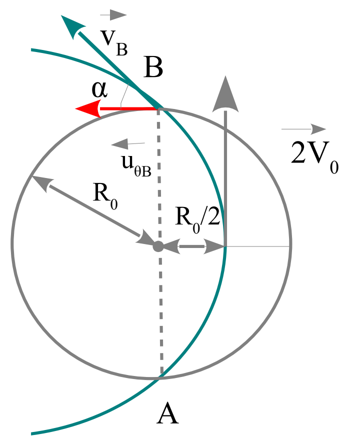
4. Trajectoire d'une comète



1. $\boldsymbol{V_0=\frac{2\pi R_0}{T_0}}$

2a. On calcule l'énergie mécanique de la comète grâce à ses caractéristiques au périhélie:

$Em(Comète)=\frac{1}{2}m_c(2V_0)^2-\frac{G M_s m_c}{\frac{R_0}{2}}$ or V_0 est la vitesse de la terre sur son orbite circulaire on la calcule en exprimant l'énergie de la terre sur son orbite:

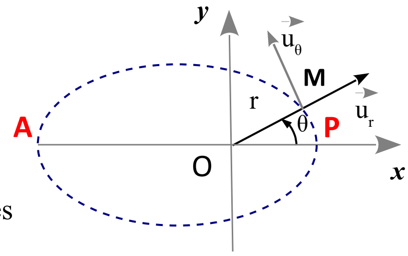
$Em(Terre)=\frac{-G M_s m_T}{2R_0}=\frac{1}{2}m_T V_0^2-\frac{G M_s m_T}{R_0}$ d'où $\boldsymbol{V_0^2=\frac{GM_s}{R_0}}$

en remplaçant l'expression de V_0^2 dans l'expression de Em(comète) on trouve : $\boxed{Em(Comète)=0}$. **On en déduit que la trajectoire de la comète est parabolique.**

2b. $Em(Comète)=\frac{1}{2}m_c(v)^2-\frac{G M_s m_c}{r}=0$ or $V_0^2 R_0=GM_s$ on en déduit que : $\boxed{v=V_0\sqrt{\frac{2R_0}{r}}}$

5. Mise en orbite géostationnaire

1) ci-contre.



2) en P θ = 0 et en A θ = π. On en déduit : $\boxed{r_P=\frac{p}{1+e}}$, et $\boxed{r_A=\frac{p}{1-e}}$.

Applications numériques :

$\boxed{r_P=\frac{11800}{1+0,72}=6860\ km}$ et $\boxed{r_A=\frac{11800}{1-0,72}=42142\ km}$ et les altitudes correspondantes :

$\boxed{h_P=r_P-R=6860-6400=460\ km}$ et $\boxed{h_A=r_A-R=42142-6400=35742\approx 35700\ km}$

3) On calcule la vitesse à l'apogée en expriment l'énergie mécanique : $Em=\frac{-G M_T m_s}{(r_A+r_P)}=\frac{1}{2}m_s V_A^2-\frac{G M_T m_s}{r_A}$ d'où

$V_A=\sqrt{\frac{-2GM_T}{r_A+r_P}+\frac{2GM_T}{r_A}}=\sqrt{2GM_T\left(\frac{-1}{r_A+r_P}+\frac{1}{r_A}\right)}$ d'où . $\boxed{V_A=\sqrt{\frac{2GM_T r_P}{r_A(r_A+r_P)}}}$ et $\boxed{V_P=\sqrt{\frac{2GM_T r_A}{r_P(r_A+r_P)}}}$

AN : $V_A=\sqrt{\frac{2\times 6,67.10^{-11}\times 6,0.10^{24}\times 6860}{(42142+6860)\times 42142.10^3}}$ d'où $\boxed{V_A=1631\ m.s^{-1}\approx 1,6\ km.s^{-1}}$. C'est la vitesse **minimale.**

et $V_P=\sqrt{\frac{2\times 6,67.10^{-11}\times 6,0.10^{24}\times 42142}{(42142+6860)\times 6860.10^3}}$ d'où $\boxed{V_P=10017\ m.s^{-1}\approx 10\ km.s^{-1}}$. C'est la vitesse **maximale.**

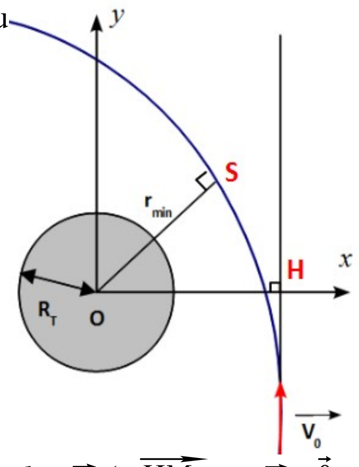
4) D'après la 3ème loi de Képler, sur l'orbite géostationnaire circulaire de rayon R_0 : $\boldsymbol{\frac{T^2}{R_0^3}=\frac{4\pi^2}{GM_T}}$ (1) de plus la vitesse V_0 sur cette orbite est constante donc $\boldsymbol{R_0=\frac{V_0}{\omega}=\frac{V_0 T}{2\pi}}$ en remplaçant dans l'expression (1) on obtient :

$\boldsymbol{V_0=\left[\frac{2\pi G M_T}{T}\right]^{\frac{1}{3}}}$. AN : $V_0=\left[\frac{2\pi\times 6,67.10^{-11}\times 6,0.10^{24}}{86400}\right]^{\frac{1}{3}}$ d'où $\boxed{V_0=3051\ m.s^{-1}}$. v=d/T=(2 pi R) /T

Le supplément de vitesse est : $\boxed{\Delta V=V_0-V_A=3051-1631=1420\ m.s^{-1}\approx 1,4\ km.s^{-1}}$

7. Distance de plus courte approche

Le météore est soumis à une force centrale, son moment cinétique se conserve au cours du mouvement: $\boxed{\vec{L}_\infty=\vec{L}_S}$.



$\vec{L}_\infty=\overrightarrow{OM}_\infty\wedge m\vec{v}_0=(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HM}_\infty)\wedge m\vec{v}_0=\overrightarrow{OH}\wedge m\vec{v}_0+\overrightarrow{HM}_\infty\wedge m\vec{v}_0=b\vec{u}_x\wedge m v_0\vec{u}_y+\vec{0}=mb\,v_0\vec{u}_z$ ($\overrightarrow{HM}_\infty\wedge m\vec{v}_0=\vec{0}$ car les deux vecteurs sont collinéaires)

$\vec{L}_S=\overrightarrow{OS}\wedge m\vec{v}_s=r_{min}m\,v_s\vec{u}_z$ d'où: $\boxed{b\,v_0=r_{min}v_s}$ (1).

• Une force centrale est une force conservative donc l'énergie mécanique du météore se sonserve: $\boxed{E_{m\infty}=E_{mS}}$

$E_{m\infty}=\frac{1}{2}m v_0^2-\frac{G M_T m}{r_\infty}=\frac{1}{2}m v_0^2$ et $E_{ms}=\frac{1}{2}m v_s^2-\frac{G M_T m}{r_{min}}$ d'où: $\frac{1}{2}m v_s^2-\frac{G M_T m}{r_{min}}=\frac{1}{2}m v_0^2$ d'où

$v_s^2-v_0^2=\frac{2G M_T}{r_{min}}$ or $v_s=\frac{b v_0}{r_{min}}$ d'après (1) d'où $\left(\frac{b v_0}{r_{min}}\right)^2-v_0^2=\frac{2G M_T}{r_{min}}$. En réduisant au même dénominateur, on obtient un polynome du 2nd degré : $r_{min}^2+\frac{2G M_T}{v_0^2}r_{min}-b^2=0$. $\Delta=\left(\frac{2G M_T}{v_0^2}\right)^2+4b^2$ $r_{min}>0$ doù:

$$\boxed{r_{min}=\frac{-\frac{2G M_T}{v_0^2}+\sqrt{\left(\frac{2G M_T}{v_0^2}\right)^2+4b^2}}{2}=-\frac{G M_T}{v_0^2}+\sqrt{\left(\frac{G M_T}{v_0^2}\right)^2+b^2}}.$$