Concours Blanc
PSI
MATHEMATIQUES
Vendredi 3 Mars 2023
(Durée : 4 heures)

L'usage de calculatrice est interdit.

Sujet CCINP/E3A

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons de ses initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES
- **Indiquer le sujet choisi**
- **Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d' autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.**
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Indiquer au début de la copie le nombre de copies doubles utilisées.**
- **Numéroter les feuilles.**
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

Exercice 1 :

On note S l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
   Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $\dfrac{-1}{\gamma}$.
2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$.
   Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de γ_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle ?
   (1) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$
   (2) $y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$
   (3) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes :
   - X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
   - pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

   3.1. Montrer que X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

   3.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

   3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1$.

   3.4. **Etude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in \mathbb{N}$**

   3.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

   3.4.2. Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

3.6. **Etude de la covariance de deux termes de la suites** $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$

3.6.1. Donner la définition de la covariance de deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y admettant des variances.

3.6.2. Démontrer que $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$.

3.6.3. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Montrer que

$$Cov\left(X_p, X_q\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda\left(\left(y_{p+q-1}\right)^2 - \left(y_{p-1}\right)^2 - \left(y_{q-1}\right)^2\right) + \mu\left(\left(y_{p+q}\right)^2 - \left(y_p\right)^2 - \left(y_q\right)^2\right)\right)$$

En déduire que $Cov\left(X_p, X_q\right) > 0$.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 2 :

Dans cet exercice, on pourra utiliser que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\ dt$.

1. (a) Justifier que pour $s > -1$, il existe $\gamma < 1$ tel que $t^s \ln(t) = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$.

   (b) Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\ dt$ existe et donner sa valeur.

2. Etude de la fonction H

   (a) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.

   (b) Sans calcul de la dérivée, montrer que H est monotone sur D_H.

   (c) Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha (\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

   (d) Démontrer que H est de classe C^1 sur D_H. Retrouver alors la monotonie de H.

   (e) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

   (f) Démontrer que

   $$\forall x > -1,\ H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

   (g) Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

   (h) Soit $x > -1$.

      i. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.

      ii. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

      $$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$$

      iii. En déduire que

      $$H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

      iv. Calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Exercice 3 :

On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,\ q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

1. Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^t V_0$.
   (a) Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?
   (b) Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.
   (c) i. Calculer $A_0 U_0$.
   ii. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   iii. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.
2. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   (a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.
   Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} l_1 \cdots l_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.
   (b) Vérifier que $LC = \mathrm{tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A.
   (c) Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.
   Montrer que $\left(\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda\right) X = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{tr}(A)\}$.
   (d) Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
   (e) Vérifier que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A.
   (f) Montrer que : A est diagonalisable $\iff \mathrm{tr}(A) \neq 0$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
   On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   (a) Montrer que $f(u) \neq 0$.
   (b) En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.
   (c) Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :Un logarithme complexe

1. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\ln(1+x)$.

   Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note :

$$S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}.$$

2. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R,R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

   Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

   En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.
   On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.
4. Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t)$.
5. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + t z_0} h(t).$$

6. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

   On pourra étudier la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{h(t)}{1+tz_0}$.