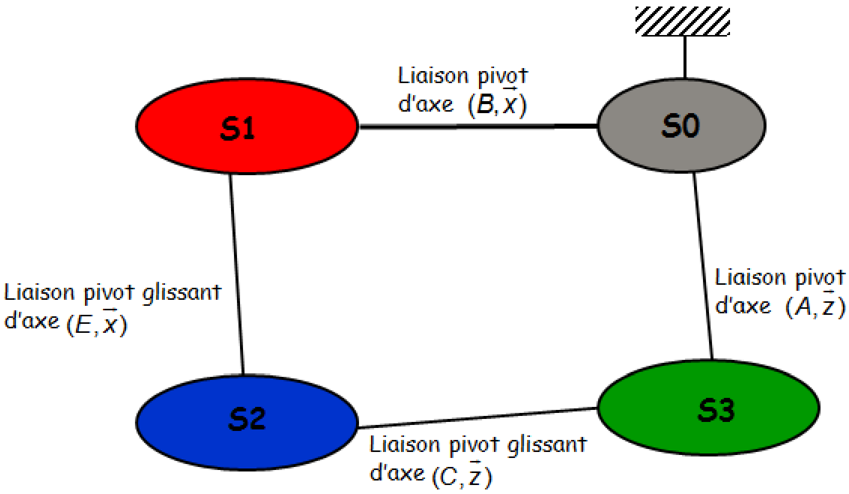
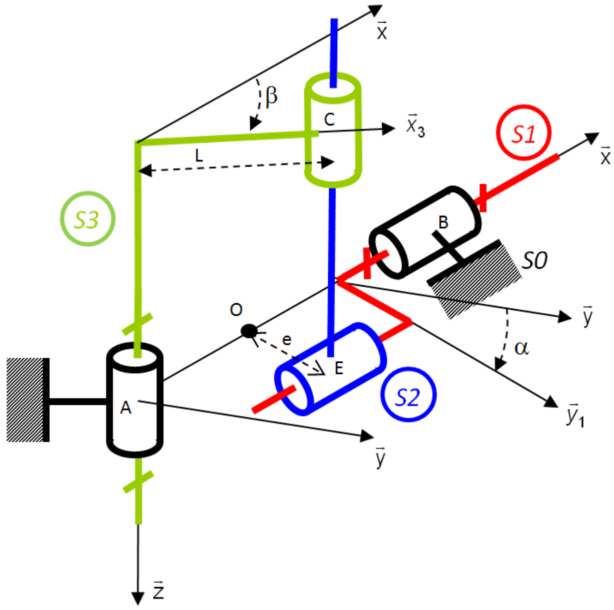
Ex. 1 : Ponceuse à vibrations rotatives

Question 1. Graphe des liaisons du mécanisme.





Question 2. Identifier les paramètres de mouvement :

Paramètre d'entrée : α

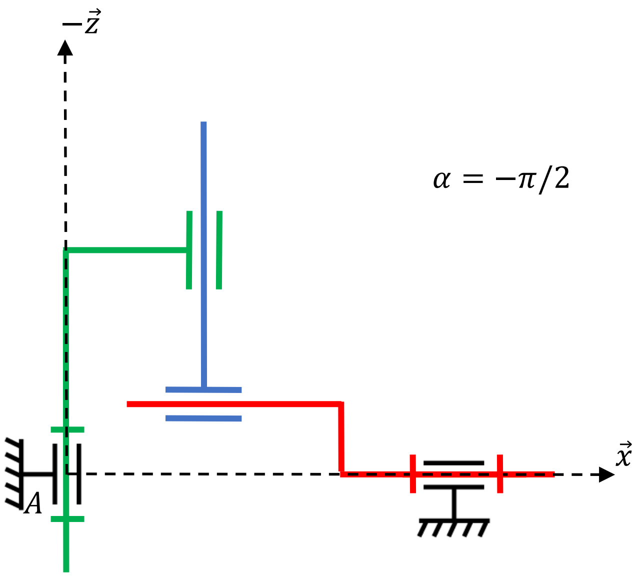
Paramètre de sortie : β

Paramètres intermédiaires : λ, μ

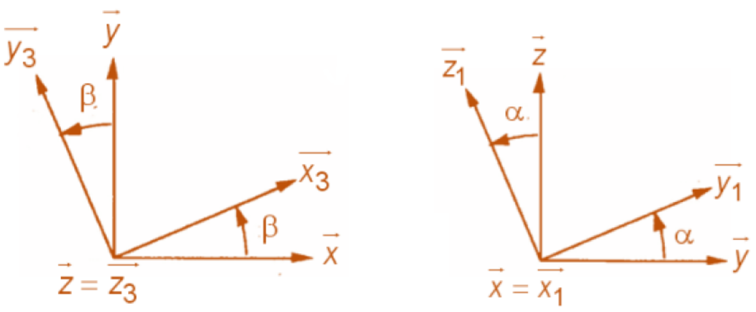
Paramètres caractéristiques : a, L, h, e

Mobilité interne : pas de mobilité interne

Question 3. Schéma cinématique 2D avec $\alpha = \pi/2$ ou $\alpha = -\pi/2$ dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$



Question 4. Réaliser la ou les figures de changement de base.



Question 5. A partir de la fermeture géométrique, écrire la loi entrée-sortie en position du mécanisme en exprimant la sortie en fonction de l'entrée du système.

On cherche à avoir une fonction : $\beta = f(\alpha)$

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow a\,\vec{x} + \lambda\,\vec{x} + e\,\vec{y}_1 + \mu\,\vec{z} + h\,\vec{z} - L\,\overrightarrow{x_3} = \vec{0}$$

Projection suivant $\vec{x}$: $a + \lambda - L\,cos(\beta) = 0 \quad (1)$

Projection suivant $\vec{y}$:$e\cos(\alpha) - L\,sin(\beta) = 0 \quad (2)$

Projection suivant $\vec{z}$: $e\sin(\alpha) + h + \mu = 0 \quad (3)$

A partir de l'équation (2), on trouve :

$$\beta = (-1)^n \arcsin\left(\frac{e\cos(\alpha)}{L}\right)\;[\pi]$$

Lorsque $\alpha = 0°$, AEO forme un triangle rectangle en 0 tel que $\beta = \arcsin(e/L)$

On en déduit l'unique solution :

$$\beta = \arcsin\left(\frac{e\cos(\alpha)}{L}\right)$$

Question 6. A partir de la fermeture géométrique, en déduire la loi entrée-sortie en vitesse en exprimant $\dot{\beta}$ en fonction de α et $\dot{\alpha}$.

En dérivant l'équation (2), on obtient :

$$e.\dot{\alpha}\sin(\alpha) + L.\dot{\beta}\,cos(\beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\beta} = \frac{-e.\dot{\alpha}\sin(\alpha)}{L\,cos(\beta)}$$

Or :

$$cos(\beta) = \sqrt{1 - sin^2(\beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{e\cos(\alpha)}{L}\right)^2}$$

Donc :

$$\dot{\beta} = \frac{-e.\dot{\alpha}\sin(\alpha)}{L\sqrt{1 - \left(\frac{e\cos(\alpha)}{L}\right)^2}}$$

Autre approche : on sait que :

$$\left(\arcsin(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$$

Donc :

$$\dot{\beta} = \left(\arcsin\left(\frac{e\cos(\alpha)}{L}\right)\right)' = \frac{-\frac{e.\dot{\alpha}\sin(\alpha)}{L}}{\sqrt{1 - \left(\frac{e\cos(\alpha)}{L}\right)^2}}$$

Question 7. A partir d'une fermeture cinématique, exprimer $\dot{\beta}$ en fonction de $\beta, \dot{\alpha}, \alpha$.

$$\{V_{3/0}\} = \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\}$$

$$\{V_{3/0}\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \dot{\beta}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \{V_{3/2}\} = {}_{C\ ou\ E}\begin{Bmatrix} \omega_{z\,3/2}.\vec{z} \\ \dot{\mu}\,\vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\{V_{2/1}\} = {}_{E}\begin{Bmatrix} \omega_{x\,2/1}.\vec{x} \\ \dot{\lambda}\,\vec{x} \end{Bmatrix} \qquad \{V_{1/0}\} = {}_{A,\ B\ ou\ O}\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}.\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Si l'on déplace tous les torseurs au point E, on a l'expression :

$$\vec{V}_{E\in3/0} = \vec{V}_{E\in3/2} + \vec{V}_{E\in2/1} + \vec{V}_{E\in1/0}$$

$$\vec{V}_{E\in3/0} = \vec{V}_{A\in3/0} + \overrightarrow{EA} \wedge \vec{\Omega}_{3/2} = \vec{0} + ((\mu + h)\vec{z} - L\,\vec{x_3}) \wedge \dot{\beta}.\vec{z} = L.\dot{\beta}\,\vec{y_3}$$

$$\vec{V}_{E\in3/2} = \dot{\mu}\,\vec{z}$$

$$\vec{V}_{E\in2/1} = \dot{\lambda}\,\vec{x}$$

$$\vec{V}_{E\in1/0} = \vec{V}_{0\in1/0} + \overrightarrow{EO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0} - e\,\vec{y}_1 \wedge \dot{\alpha}.\vec{x} = e.\dot{\alpha}.\vec{z_1}$$

En projetant suivant $\vec{y}$ la fermeture cinématique en vitesse au point E, on a :

$$\vec{V}_{E\in3/0}.\vec{y} = \vec{V}_{E\in3/2}.\vec{y} + \vec{V}_{E\in2/1}.\vec{y} + \vec{V}_{E\in1/0}.\vec{y}$$

$$\Leftrightarrow L.\dot{\beta}\,\overrightarrow{y_3}.\vec{y} = \dot{\mu}\,\vec{z}.\vec{y} + \dot{\lambda}\,\vec{x}.\vec{y} + e.\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1}.\vec{y}$$

$$\Leftrightarrow L.\dot{\beta}\cos(\beta) = 0 + 0 - e.\dot{\alpha}.\sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\beta} = \frac{-e.\dot{\alpha}.\sin(\alpha)}{L.\cos(\beta)}$$

Question 8. Vérifier que la loi entrée-sortie en vitesse obtenue par fermeture cinématique est la même que celle obtenue par fermeture géométrique.

On utilisant une relation trigonométrique et la loi entrée sortie en position, on a :

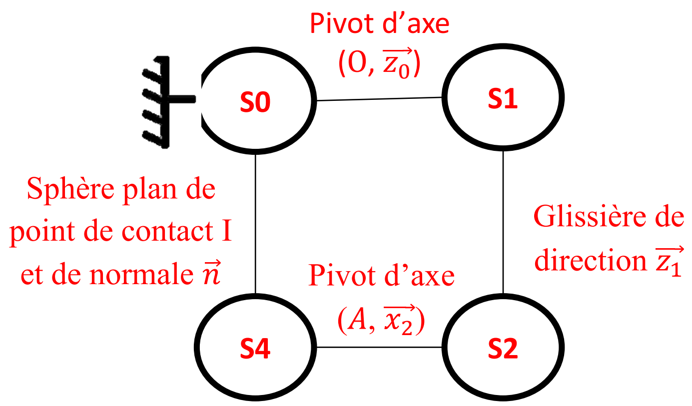
$$cos(\beta) = \sqrt{1 - sin^2(\beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{e\cos(\alpha)}{L}\right)^2}$$

En injectant ce résultat dans celui trouvé à la question précédente, on obtient bien la loi entrée sortie en vitesse :

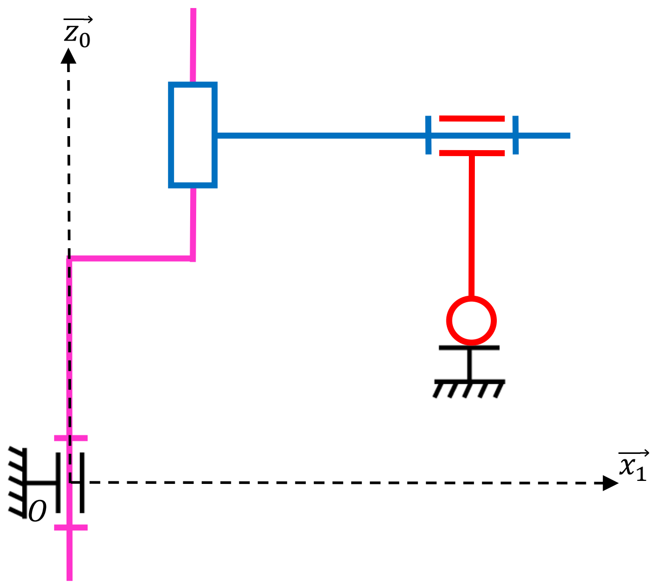
$$\dot{\beta} = \frac{-e.\dot{\alpha}.\sin(\alpha)}{L.\cos(\beta)} = \frac{-e.\dot{\alpha}.\sin(\alpha)}{L.\sqrt{1 - \left(\frac{e\cos(\alpha)}{L}\right)^2}}$$

Ex. 2 : Manège de fête foraine : « La chenille »

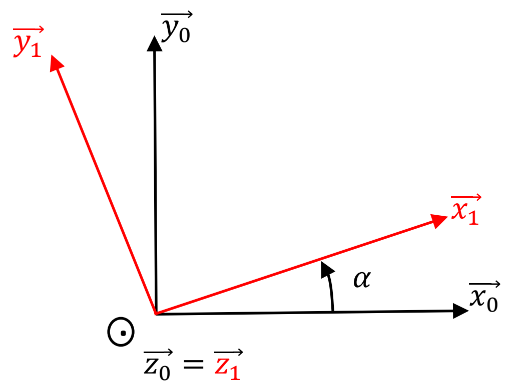
Question 1. Graphe des liaisons du mécanisme.

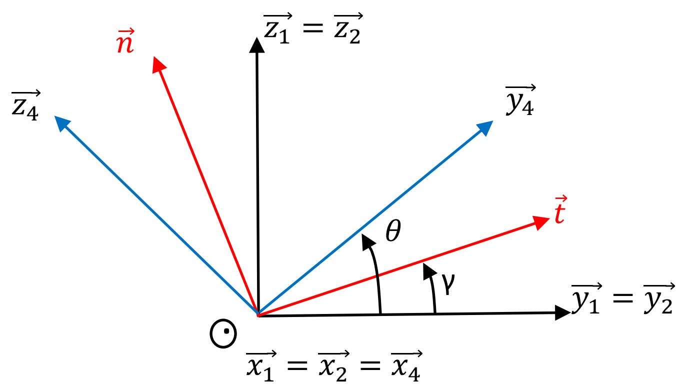


Question 2. Réaliser un schéma cinématique 2D dans le plan $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1})$



Question 3. Réaliser la ou les figures de changement de base.





Question 4. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de glissement entre S0 et S4.

$$\vec{V}_{I\in 4/0} = \vec{V}_{I\in 4/2} + \vec{V}_{I\in 2/1} + \vec{V}_{I\in 1/0}$$

$\vec{V}_{I\in 4/2} = \vec{V}_{A\in 4/2} + \overrightarrow{IA} \wedge \vec{\Omega}_{4/2} = \vec{0} + R\,\vec{n} \wedge \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_2} = R.\dot{\theta}\,\vec{t}$

$\vec{V}_{I\in 2/1} = \dot{\lambda}\,\overrightarrow{z_2}$

$\vec{V}_{I\in 1/0} = \vec{V}_{O\in 1/0} + \overrightarrow{IO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0} + (R\,\vec{n} - \lambda\,\overrightarrow{z_0} - L\,\overrightarrow{x_1}) \wedge \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_1} = -R.\dot{\alpha}\sin(\gamma)\,\overrightarrow{x_1} + L.\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_1}$

Donc : $\vec{V}_{I\in 4/0} = R.\dot{\theta}\,\vec{t} + \dot{\lambda}\,\overrightarrow{z_2} - R.\dot{\alpha}\sin(\gamma)\,\overrightarrow{x_1} + L.\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_1}$

Question 5. Après avoir projeter le vecteur vitesse de glissement dans la base locale liée au contact, donner une expression de $\dot{\lambda}$ en fonction de $\dot{\alpha}$, γ et des paramètres caractéristiques qui permet de garantir que le vecteur vitesse de glissement est bien contenu dans le plan tangent commun aux deux solides en contact.

Dans la base locale au contact $(\vec{t}, \vec{n}, \overrightarrow{x_1})$, on a :

$$\overrightarrow{z_2} = \sin(\gamma)\,\vec{t} + \cos(\gamma)\,\vec{n}$$

$$\overrightarrow{y_1} = \cos(\gamma)\,\vec{t} - \sin(\gamma)\,\vec{n}$$

On a donc :

$$\vec{V}_{I\in 4/0} = \left(R.\dot{\theta} + \dot{\lambda}\sin(\gamma) + L.\dot{\alpha}\cos(\gamma)\right)\vec{t} - \left(\dot{\lambda}\cos(\gamma) + L.\dot{\alpha}\sin(\gamma)\right)\vec{n} - R.\dot{\alpha}\sin(\gamma)\,\overrightarrow{x_1}$$

La vitesse de glissement est uniquement suivant $\vec{t}$,il faut donc $\vec{V}_{I\in 4/0}.\vec{n} = \vec{0}$

On a alors la relation : $\dot{\lambda}\cos(\gamma) + L.\dot{\alpha}\sin(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \dot{\lambda} = -L.\dot{\alpha}\tan(\gamma)$

Question 6. Dans le cas où le sol est plat (pas de dos d'âne), donner une expression de $\dot{\theta}$ en fonction $\dot{\alpha}$ et des paramètres caractéristiques, nécessaire pour avoir un roulement sans glissement entre S4 et S0 au point de contact.

Si le sol est plat : $\gamma = 0$, $\overrightarrow{z_1} = \vec{n}$, $\overrightarrow{y_1} = \vec{t}$ et $\dot{\lambda} = 0$

On a alors : $\vec{V}_{I\in 4/0} = R.\dot{\theta}\,\vec{t} + \dot{\lambda}\,\overrightarrow{z_2} - R.\dot{\alpha}\sin(\gamma)\,\overrightarrow{x_1} + L.\dot{\alpha}\,\overrightarrow{y_1} = \left(R.\dot{\theta} + L.\dot{\alpha}\right)\overrightarrow{y_1}$

RSG$\Leftrightarrow \vec{V}_{I\in 4/0} = \vec{0} \Leftrightarrow \dot{\theta} = -L.\dot{\alpha}/R$

Question 7. Lorsque le sol n'est pas plat, déterminer l'expression des vecteurs de roulement $\vec{\Omega}_{4/0}^{roul}$ et de pivotement $\vec{\Omega}_{4/0}^{piv}$.

$\vec{\Omega}_{4/0} = \vec{\Omega}_{4/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_2} + \vec{0} + \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_2} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_2} + \dot{\alpha}\ \sin(\gamma)\,\vec{t} + \dot{\alpha}\ \cos(\gamma)\,\vec{n}$

D'après la définition du cours : $\vec{\Omega}_{4/0}^{roul}$ est suivant $\vec{t}$ et/ou $\overrightarrow{x_2}$, $\vec{\Omega}_{4/0}^{piv}$ est suivant $\vec{n}$

Par identification, on trouve : $\vec{\Omega}_{4/0}^{roul} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_2} + \dot{\alpha}\ \sin(\gamma)\,\vec{t}$ $\qquad \vec{\Omega}_{4/0}^{piv} = \dot{\alpha}\ \cos(\gamma)\,\vec{n}$

Question 8. Dans le cas où le sol est plat, déterminer le rapport de vitesse $\left\|\vec{\Omega}_{4/0}^{roul}/\vec{\Omega}_{4/0}^{piv}\right\|$.

Si le sol est plat et que $\gamma = 0$: $\vec{\Omega}_{4/0}^{roul} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{x_2} = -L.\dot{\alpha}/R\,\overrightarrow{x_2}$ et $\vec{\Omega}_{4/0}^{piv} = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{z_2}$

On en déduit : $\left\|\vec{\Omega}_{4/0}^{roul}/\vec{\Omega}_{4/0}^{piv}\right\| = L/R = 2/0{,}2 = 10$ ce qui est bien supérieur à 8.