Continuité
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$, avec

- pour tout $x \in I$ $f(x,.)$ continue par morceaux sur J,
- pour tout $t \in J$, $f(.,t)$ continue sur I,
- il existe φ continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tous x de I et y de J, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Soit a un point de I, et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de I convergeant vers a.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note f_n la fonction $t \mapsto f(x_n,t)$. La première hypothèse assure la continuité par morceaux de chacune de ces fonctions sur J.
La deuxième assure la convergence simple de la suite de fonctions f_n vers la fonction $h : t \mapsto f(a,t)$, qui, par la première hypothèse, est également continue par morceaux sur J.
Enfin, pour tout $t \in I$, et tout $n \in N$, $|f(x_n,t)| \leqslant \varphi(t)$, ce qui se réécrit : pour tout $t \in I, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.

Par théorème de convergence dominée appliqué à la suite de fonctions (f_n) de limite h, avec domination par la fonction φ, on en déduit que

- Chaque f_n et h sont des fonctions intégrables sur J ;
- de plus, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_J f_n = \int_J \lim_{n\to\infty} f_n$, c'est-à-dire, puisque $\displaystyle\int_J f_n = \int_J f(x_n,t)dt = F(x_n)$ et $\displaystyle\int_J \lim_{n\to\infty} f_n = \int_J f(a,.) = F(a)$, que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(a)$.

Ce dernier point étant vrai pour toute suite convergeant vers a, par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f est continue en a.
Et puisque le point a est quelconque dans I, ce qui précède assure la continuité de la fonction F sur I tout entier.

Dérivabilité
Les hypothèses de travail sont naturellement plus exigeantes que pour assurer la continuité seule. En effet, on demande que

- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
- pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (et non continue seulement).
- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination globale ou locale. (On note ψ la fonction par laquelle on domine)

Tout d'abord, observons que pour tout $x \in I$, F est définie en x par intégrabilité de $f(x,.)$.
D'après la dernière hypothèse, et en appliquant l'inégalité des accroissements finis à $f(.,t)$, pour tous a et b distincts de I, pour tout t fixé dans J, $|\dfrac{f(b,t)-f(a,t)}{b-a}| \leqslant \psi(t)$.
On déduit de ceci que $t \mapsto \dfrac{f(b,t)-f(a,t)}{b-a}$, fonction continue par morceaux sur J, est de plus intégrable sur J, et ce, pour tous a et b distincts de I, et F est bien définie sur I.

Soit maintenant une suite $(x_n)_n$ d'éléments de I (distincts de a) convergeant vers a. Alors, en posant $g_n : t \mapsto \dfrac{f(x_n,t)-f(a,t)}{x_n-a}$, qui est continue par morceaux sur J pour tout n et d'après la première hypothèse, on remarque que, puisque $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (deuxième hypothèse), pour tout t de J, la suite $(g_n(t))_n$ converge vers $h : t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$, qui est (troisième hypothèse) continue par morceaux sur J. La dernière hypothèse permet d'utiliser le théorème de convergence dominée appliqué à la suite de fonctions $(g_n)_n$ et à leur limite, sur l'intervalle d'intégration J, et

$$\lim_{n\to\infty}\int_J g_n = \int_J \lim_{n\to\infty} g_n,$$

c'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale (toutes les fonctions étant intégrables) qu'on a l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{F(x_n)-F(a)}{(x_n-a)}$, que F est donc dérivable en a et que

$$F'(a) = \lim_{n\to\infty}\frac{F(x_n)-F(a)}{(x_n-a)} = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)dt$$

La conclusion suit, toujours en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, et le caractère local de la dérivabilité.