Table des matières

Pré-requis

Intégrale d'une fonction continue sur un segment, convergence des sommes de Riemann. Primitive d'une fonction continue, théorème fondamental du calcul différentiel.

Objectifs

Donner du sens aux intégrales du cours de physique ou chimie ayant des bornes infinies ou des bornes ouvertes. Servira à étudier la nature de certaines séries numériques. On généralise les propriétés de l'intégrales sur un segment aux fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.

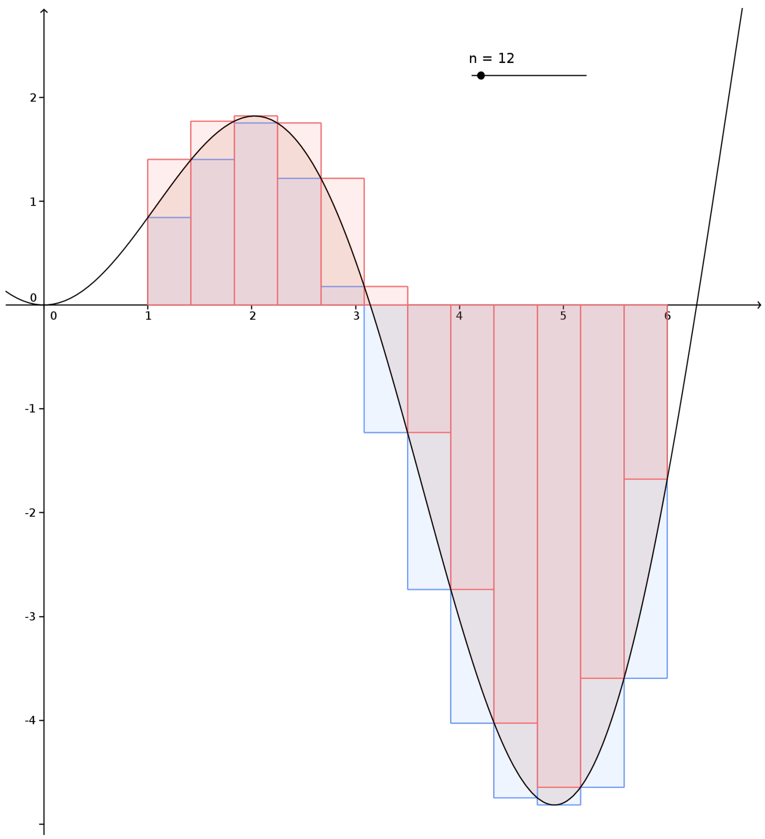
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

I. Rappels de PCSI : intégration sur un segment

I.1 Intégrales de Riemann

lemme 1. *Etant donnés deux réels $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$* **continue**, *la limite suivante existe et est finie :*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)$$



Définition 1 (Intégrale de Riemann).

Etant donnés deux réels $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ on appelle **intégrale de** f sur le segment $[a, b]$ le nombre noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, ou $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, défini par :

$$\boxed{\int_{[a,b]} f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N}\, f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)}$$

Remarque 1. Cette définition s'étend immédiatement à toute fonction continue sur $]a, b[$ et prolongeable par continuité en a et b : on ne change pas la valeur d'une intégrale en changeant la valeur en l'une de ses bornes.

I.2 Lien entre primitive et dérivée

Théorème 2 (théorème fondamental du calcul intégral).

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

i) l'application $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

ii) Pour toute primitive H de f sur I, et tout $x \in I$, on a : $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = H(x) - H(a)$.

iii) Si $\underline{G \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})}$, alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $\boxed{G(x) - G(a) = \int_a^x G'(t)\ \mathrm{d}t}$.

II. Intégrales généralisées d'une fonction continue

II.1 Sur un intervalle du type $[a, +\infty[$

1.a) Définition

Définition 2 (Intégrale généralisée convergente sur $[a, +\infty[$).

Etant donnés un réel a et $f \in \mathcal{C}^0([a+\infty[, \mathbb{K})$ on dit que **l'intégrale généralisée** de f sur $[a, +\infty[$ (impropre au voisinage de $+\infty$) **converge** lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

En cas de convergence, on note $\boxed{\int_a^{+\infty} f}$ ou $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t}$ la valeur de cette **limite finie**.

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

exemple 1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ diverge, car $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $F : x \mapsto \ln(x)$ et $F(x)$ n'a pas de limite finie en $+\infty$.

exemple 2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t) - t\sin(t)\ \mathrm{d}t$ diverge, car $f : x \mapsto \cos(x) - x\sin(x)$ a pour primitive $F : x \mapsto x\cos(x)$ et $F(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

1.b) Intégrales de référence

Proposition 3 (Intégrales de Riemann).

Soit α un réel.

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1}$.

De plus, on a : $\forall \alpha > 1,\ \int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}$.

démonstration : pour $\alpha = 1$ on primitive $x \mapsto x^{-1}$ en $x \mapsto \ln x$; pour $\alpha \neq 1$, on primitive $f : x \mapsto x^{-\alpha}$ en $F : x \mapsto \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $-\alpha+1 < 0$, ie ssi $1 < \alpha$. □

Proposition 4 (exponentielles).

Soit β un réel.

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\beta > 0}$.

De plus, on a : $\forall \beta > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}$.

démonstration : pour $\beta \neq 0$, on primitive $f : x \mapsto e^{-\beta x}$ en $F : x \mapsto \dfrac{e^{-\beta x}}{-\beta}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 0$. □

II.2 Généralisation à un intervalle quelconque

Définition 3 (Intégrale impropre convergente sur $[a, b[$).

Etant donnés deux réels a, b et $f \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{K})$ on dit que **l'intégrale généralisée** (impropre en b) de f sur $[a, b[$ converge lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** : $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^b f$, ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ la valeur de cette limite.

On dit qu'elle diverge sinon.

Définition 4 (Intégrale généralisée convergente sur un intervalle réel qcq).

Etant donnés I un intervalle de bornes α et β réelles ou infinies, avec $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, on dit que **l'intégrale généralisée** de f sur I (impropre en les bornes infinies ou les bornes finies sans prolongement par continuité) converge lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** :

$$\lim_{x \to \alpha^+,\ y \to \beta^-} \int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t$$

En cas de convergence, on note $\boxed{\displaystyle\int_\alpha^\beta f}$ ou $\boxed{\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t}$ la valeur de cette **limite finie**.

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

Remarque 2. Il s'agit d'une généralisation à un intervalle quelconque I, avec $\alpha = \inf I$ et $\beta = \sup I$, on dit que l'intégrale de $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ converge si $\displaystyle\lim_{x \to \alpha^+} \lim_{y \to \beta^-} \int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et est FINIE.

Cela permet de considérer des intervalles de la forme $]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]a, b]$, $[b, a[$, etc...

Remarque 3. Ainsi pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$:

1. On détermine les éventuelles bornes infinies, et les valeurs éventuelles de discontinuité de f. On détermine alors le ou les intervalles de continuité de f.
2. Pour chaque segment dans un intervalle de continuité, on justifie l'existence d'une limite finie pour les intégrales dont une borne se raproche d'une borne impropre.

Proposition 5 (Intégrales de Riemann).

Soit γ un réel.

L'intégrale généralisée $\int_0^1 t^{-\gamma}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\gamma < 1}$.

De plus, on a : $\forall \gamma < 1,\ \int_0^1 t^{-\gamma}\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{1-\gamma}$.

démonstration : on primitive $f : x \mapsto x^{-\gamma}$ en $F : x \mapsto \dfrac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $-\gamma+1 > 0$, i.e. ssi $1 > \gamma$. $\square$

exemple 3. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, \mathrm{d}t$ converge, car $f : x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, se primitive en $x \mapsto -e^{-x}$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, et de même $\int_{-\infty}^0 e^t \mathrm{d}t$ converge.

Proposition 6 (logarithme).

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\, \mathrm{d}t = -1}$.

démonstration :

L'intégrale généralisée (impropre en 0) $\int_0^1 \ln(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut -1, car $f : x \mapsto \ln x$ a pour primitive sur $]0,1]$ la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ et par croissance comparées $\lim_{x \to 0^+} F(x) = 0$. $\square$.

III. Intégrabilité

III.1 Cas des fonctions continues par morceaux

1.a) Définition

Définition 5.

Soit $I=[a,b]$ un segment. On dit que $f:I\longrightarrow\mathbb{K}$ est **continue par morceaux** sur I s'il existe un entier m, une subdivision $x_0=a<x_1<\dots x_n=b$ de I tels que pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, en notant $I_i=]x_i,x_{i+1}[$, on ait :

$$f_{|I_i}:I_i\to\mathbb{K}\text{ est prolongeable par continuité sur }I_i.$$

exemple 4. $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ t\longmapsto\begin{cases}t^2 & \text{si}\quad t<1\\ -1-t & \text{si}\quad t\geq 1\end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0,2]$ (prendre la subdivision $0<1<2$).

Notation 1. On note $\boxed{\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

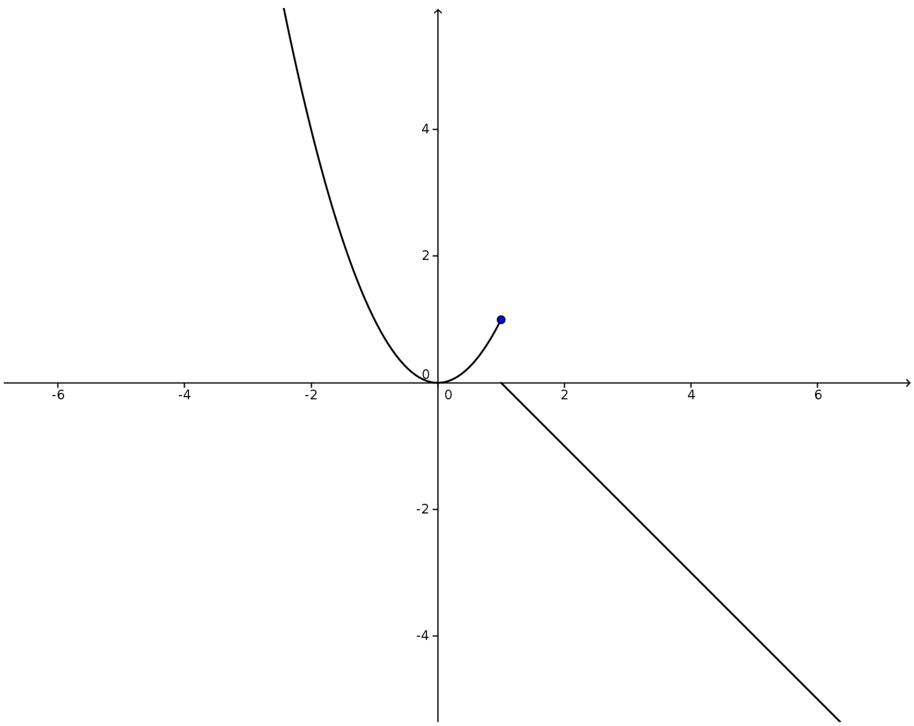
On peut étendre cette notion aux fonctions définies sur un intervalle :

Définition 6.

Soit $J=]a,c[$ un intervalle. On dit que $f:J\to F$ est **continue par morceaux** sur J si elle est continue par morceaux sur tout segment $I\subset J$.

exemple 5. la partie entière $x\mapsto E(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (prendre des subdivision $a<E(a)+1<\cdots<E(b)<b$ sur tout segment $[a,b]$).

exemple 6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\longmapsto\begin{cases}t^2 & \text{si}\quad t<1\\ -1-t & \text{si}\quad t\geq 1\end{cases}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (prendre la subdivision $a<1<b$ sur tout segment $[a,b]$ contenant 1).



Définition 7.

Soit $I=[a,b]$ un segment, $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, m un entier et une subdivision adaptée $x_0=a<x_1<\dots x_m=b$ de I, i.e. pour tout $i\in[\![0,m-1]\!]$, en notant $I_i=]x_i,x_{i+1}[$, $f_{|I_i}$ est continue et se prolonge par continuité en ses extrémités.

On appelle **intégrale de** f sur le segment $[a,b]$ le nombre noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ défini par :

$$\int_{[a,b]} f=\sum_{i=0}^{m-1}\int_{I_i} f=\sum_{i=1}^{m}\left(\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{N}f\left(\left(x_i+\frac{k(x_{i+1}-x_i)}{N}\right)^+\right)\right)$$

Théorème 7 (théorème fondamental du calcul intégral).

Soient I un intervalle, $a\in I$ et $f\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$.

i) l'application $F:x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

ii) Pour toute primitive H de f sur I, et tout $x\in I$, on a : $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=H(x)-H(a)$.

iii) Si $\underline{G\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})}$, alors pour tout $(a,x)\in I^2$, $\boxed{G(x)-G(a)=\displaystyle\int_a^x G'(t)\,\mathrm{d}t}$.

Définition 8.

Soit I un intervalle, $a=\inf(I)$, $b=\sup(I)$, $f\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$
On dit que l'intégrale généralisée de f sur I converge si $\lim\limits_{a,b}\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ existe et est finie, auquel cas, on dit que cette limite est la valeur de l'intégrale généralisée de $f$sur I.

Remarque 4. Dans le cas d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, les bornes impropres à étudier sont :

1. les bornes ouvertes de l'ensembles de définition (infinies ou non)
2. les valeurs de discontinuité.

III.2 Fonctions intégrables

Définition 9 (Intégrale absolument convergente).

Soient I un intervalle (borné ou non) de bornes α et β, $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale de f sur I est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} |f|$ converge.

Définition 10 (fonction intégrable).

Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I est dite **intégrable** sur I si l'intégrale de f sur I est **absolument convergente**.
Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ la valeur de cette intégrale généralisée convergente.

Remarque 5. La réciproque est fausse : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ est convergente, et non absolument convergente (c.f; TD : suites adjacentes, ou IPP).

Remarque 6. Pour une fonction à valeurs réelles positives, l'intégrabilité sur I est équivalent à la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$.

III.3 Propriétés des intégrales généralisées

3.a) Cas des fonctions positives

Proposition 8 (C.N.S d'intégrabilité pour une fonction positive sur $[a, +\infty[$).

Etant donnés un réel a et $f \in \mathcal{CM}([a+\infty[, \mathbb{R})$ **à valeurs positives**, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

démonstration : Par positivité de l'intégrale, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante, et à valeurs positives. Elle admet une limite ℓ finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée, d'après le théorème de la limite monotone, vu en PCSI □

Proposition 9 (C.N.S d'intégrabilité pour une fonction c.p.m. positive).

Soit I un intervalle, $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Etant donnée $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ **à valeurs positives**, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ x < y,\ \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \leq M.$$

idée démonstration : analogue

3.b) Propriétés usuelles.

Proposition 10 (Linéarité).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Si f et g sont continues par morceaux et si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\int_I \lambda f + \mu g$ converge et $\int_\alpha^\beta (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t$

démonstration : linéarité du passage à la limite. $\square$

Proposition 11 (positivité).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Soit f appartenant à $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction positive dont l'intégrale généralisée converge.
Alors $\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$.

i.e. $(f \geq 0 \text{ intégrable}) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$

Proposition 12 (croissance).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Soient f, g appartenant à $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction
Soient $a < b$ et f, g appartenant à $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et intégrables.
Si $f \leq g$, alors $\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_\alpha^\beta g(t)\ \mathrm{d}t$,

i.e. $(f, g \text{ intégrables et } \ \forall t \in I,\ f(t) \leq g(t)) \ \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t \leq \int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t$

Proposition 13 (Convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction intégrable).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.
Si $\int_\alpha^\beta |f|$ converge, alors $\int_\alpha^\beta f$ converge.
i.e. : toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

démonstration : cas $I = [\alpha, \beta[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $f = f^+ - f^-$, où $f^+ : t \mapsto \max(f(t), 0)$ et $f^- : t \mapsto \max(-f(t), 0)$. On a pour tout t : $0 \leq f^+(t) \leq |f(t)|$ et $0 \leq f^-(t) \leq |f(t)|$, donc par comparaison, $\int_\alpha^\beta f^+$ et $\int_\alpha^\beta f^-$ convergent, car les $\int_\alpha^y$ sont majorées par les $\int_\alpha^y |f(t)|$ donc par $\int_\alpha^\beta |f|$. Par linéarité de l'intégrale (sur les segments puis passage à la limite aux bornes impropres), $\int_\alpha^\beta (f^+ - f^-)$ converge. $\square$

Proposition 14 (relation de Chasles).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$, $\beta = \sup(I)$, $c \in]\alpha, \beta[$, et $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ intégrable sur I.
Alors

$$\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^\beta f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 15 (nullité d'une fonction continue, de signe constant et d'intégrale nulle).

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Si f est **continue intégrable** sur I et vérifie $\displaystyle\int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t = 0$, alors $f = \tilde{0}$.

en particulier : $\left(f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \forall t \in [a,b],\ f(t) \geq 0 \right) \Rightarrow \forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$

démonstration : sur un segment pour une fonction positive : vu en PCSI.

Pour une fonction à valeurs réelles de signe quelconque : conséquence des inégalités $0 \leq f^+ \leq |f|$, et $0 \leq f^- \leq |f|$, avec $f = f^+ - f^-$.

Pour une fonction à valeurs complexes : vrai pour les parties réelles et imaginaires, en remarquant que $0 \leq |\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ et $0 \leq |\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$

Pour un intervalle I quelconque : le résultat est vrai sur tout segment de I, donc sur I. $\square$

3.c) Propriétés avancées.

Théorème 16 (de comparaison).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable sur I et si : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq |g(t)|$, alors f est intégrable sur $[\alpha, \beta[$.
2. Si g est intégrable sur I et si : $|f(t)| \underset{t \to \beta^-}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable sur $[\alpha, \beta[$.
3. Si g est intégrable sur I et si : $f(t) \underset{t \to \beta^-}{\sim} g(t)$, alors f est intégrable sur $[\alpha, \beta[$.

démonstration : 1) On utilise le critère d'intégrabilité pour des fonctions positives.

2) Il existe t_0 et $K > 0$ tels que : $\forall t \geq t_0, |f(t)| \leq K|g(t)|$.

3) On se ramène au cas précédent en majorant $|f(t)|$ par $2K|g(t)|$, pour tout t dans l'intervalle $[t_0, \beta[$

Corollaire 17 (comparaison d'intégrales par équivalents en la borne impropre).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$telles que $f(t) \underset{t \to \beta^-}{\sim} g(t)$. Alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)\ \mathrm{d}t$ ont même nature.

Remarque 7. On dispose des mêmes propriétés au voisinage de $\alpha = \inf(I)$ dans le cas où $I =]\alpha, \beta]$.

exemple 7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, car $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $f(x) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable en $+\infty$ et $f(x) \underset{t\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc est intégrable en $-\infty$, par comp. avec l'intégrale de Riemann convergente $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

III.4 Propriétés des fonctions intégrables

Proposition 18 (Intégration par parties)**.**

Soient I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$, $\beta = \sup(I)$, et u, v de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $u'v$ est intégrable sur I, et $\lim\limits_{\alpha} uv$ et $\lim\limits_{\beta} uv$ existent et sont finies.

Alors
$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\alpha^+,\ y\to\beta^-} [u(t)v(t)]_{t=x}^{y} - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

démonstration : Sur un segment $[u(t)v(t)]_{t=x}^{y} = \displaystyle\int_x^y (u(t)v(t))'\mathrm{d}t = \int_x^y u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\mathrm{d}t$, puis limite. □

Notation 2. *$[u(t)v(t)]_{t=a}^{b}$ est parfois noté $[uv]_a^b$*

Théorème 19 (changement de variables bijectif)**.**

Soient $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$ deux intervalles réels, $f \in \mathcal{CM}(I, F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement monotone.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))\mathrm{d}u$ converge.

Si tel est le cas, alors $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u)f(\varphi(u))\mathrm{d}u}$

démonstration :

On se place dans le cas f continue ; le cas continue par morceaux se traiterait à l'aide d'une subdivision en intervalles de continuité.

Soit F une primitive de f sur I, et $G = F \circ \varphi$.

G est dérivable sur $J = [\alpha, \beta]$ et pour tout $u \in J$, $G'(u) = \varphi'(u)F'(\varphi(u)) = \varphi'(u)f(\varphi(u))$, donc G est la primitive de $\varphi' \times f \circ \varphi$ qui vaut $F(\varphi(\alpha))$ en α.

Ainsi, pour tout β,
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\mathrm{d}t \underset{\text{th fond. pour } F}{=} F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \underset{\text{def. de} G}{=} G(\beta) - G(\alpha) \underset{\text{th fond. pour } G}{=} \int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))\mathrm{d}u.$$
Comme φ^{-1} est une bijection de I sur J, en posant $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ et $\beta = \varphi^{-1}(b)$, on conclut. □

Remarque 8. c'est cette dernière version qui est souvent utile en pratique.

exemple 8. en posant $\varphi : u \mapsto e^u$, on a $\varphi^{-1} : t \mapsto \ln t$ et :
$$\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \mathrm{Arcsin}(\ln x) - \mathrm{Arcsin}(0) = \mathrm{Arcsin}(\ln x).$$

exemple 9. *changement de variable affine*

lorsque $J=[0,1]$, $I=[a,b]$ et $\varphi : J \longrightarrow I,\ u \longmapsto (1-u)a+ub$, on obtient : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (b-a)f((1-u)a+ub)\mathrm{d}u$

lorsque $J=[-1,1]$, $I=[a,b]$ et $\varphi : J \longrightarrow I,\ u \longmapsto \dfrac{a+b}{2}+u\dfrac{b-a}{2}$, on obtient : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2}+u\frac{b-a}{2}\right)\mathrm{d}u$

IV. Espaces vectoriels de fonctions intégrables

Définition 11 (fonction intégrable)**.**

On note $\mathcal{CM}L^1(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K});\ \displaystyle\int_I |f| \text{ converge} \right\}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.

Proposition 20.

$(\mathcal{CM}L^1(I,\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 12 (fonction intégrable)**.**

On note $\mathcal{CM}L^2(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K});\ \displaystyle\int_I |f|^2 \text{ converge} \right\}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de carré intégrables sur I.

Proposition 21 (Linéarité)**.**

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) \cap L^1([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} f \end{array}$ est linéaire.

i.e. $\forall (f,g) \in \mathcal{CM}([a,b])^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \displaystyle\int_\alpha^\beta (\lambda f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t + \int_\alpha^\beta g(t)\mathrm{d}t$

démonstration : linéarité du passage à la limite. □

Proposition 22.

L'application $(f,g) \longmapsto < f|g >= \displaystyle\int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0L^2(I,\mathbb{R})$

démonstration :
La bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale. La positivité découle de la positivité de l'intégrale.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et vérifie $< f|f >= 0$, alors $t \mapsto (f(t))^2$ est **continue positive d'intégrale nulle**, donc identiquement nulle, donc $f = \tilde{0}$. D'où le résultat. □

Proposition 23 (inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

Pour tous $f, g \in \mathcal{CML}^2(I, \mathbb{R})$, on a $\displaystyle\int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_I g(t)^2\ \mathrm{d}t}$

démonstration : On a $|f(t)g(t)| \leq \dfrac{|f(t)|^2 + |g(t)|^2}{2}$, d'où l'intégrabilité de fg.

dans le cas continu :$< f|g > \leq \|f\|_2\|g\|_2$, en notant $\| \ \|_2 : h \mapsto \sqrt{< h|h >}$ la norme associée au produit scalaire $< \ | \ >$. Le cas général se traite d'abord sur un segment à l'aide d'une subdivision adaptée à f et à g, la généralisation est directe. $\square$

Proposition 24.

$(\mathcal{CML}^2(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Programme PC :

V. Intégration

L'objectif de ce chapitre est multiple :

- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*
- *compléter le chapitre dédié aux suites et aux séries de fonctions par le théorème de la convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme ;*
- *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$	
Si f est une application à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.	Intégrale divergente.
Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Intégrales de référence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 t^{-\alpha}\mathrm{d}t$.	Les étudiants doivent connaître la nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ selon le signe de α.

Contenus	Capacités & Commentaires
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$, et si $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).	Pour une fonction à valeurs réelles, on utilise ses parties positive et négative.
Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t, \int_I f$.
Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: — si $\lvert f\rvert \leqslant \lvert g\rvert$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. — si $f(x) \underset{x\to\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a,+\infty[$.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
Si f est continue et intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I \lvert f(t)\rvert\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$.	
Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.	
Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I.	Produit scalaire de deux fonctions continues de carré intégrable sur I à valeurs réelles.
Le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable. Inégalité de Cauchy-Schwarz.	