Devoir maison n°5 sciences physiques

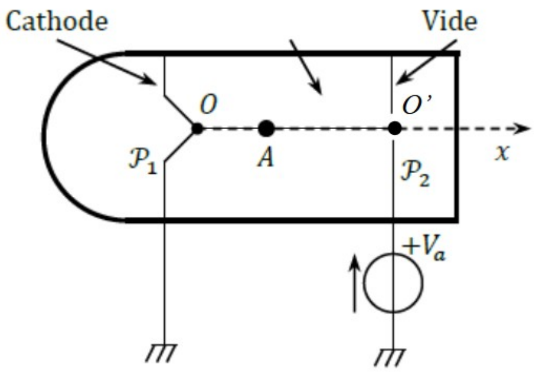
Travail en autonomie

PROBLÈME 1 : Électron accéléré et champ magnétostatique

(barème sur 30 points)

Dans un canon de microscope électronique, un électron A (masse m_e, charge électrique $-e$) est émis, avec une vitesse initiale négligeable, le long d'un axe Ox, par une plaque métallique $\mathcal{P}_1$ portée à un potentiel nul. Cet électron est accéléré, dans le vide, grâce à une grille métallique $\mathcal{P}_2$ portée à un potentiel constant V_a=100 V . Les plaques $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont habituellement appelées cathode et anode, respectivement.

Le dispositif est représenté ci-dessous.



1. Établir, en fonction des données, l'expression de la vitesse $v_{O'}$ de électron quand il atteint l'anode en O'.

2. Calculer $v_{O'}$. On indique les valeurs approximatives des constantes fondamentales suivantes : $m_e \approx 9\times10^{-31}$ kg et la charge élémentaire $e \approx 1{,}6.10^{-19}$ C.

Une fois la vitesse $v_{O'}$ acquise, on s'arrange à la sortie (non représentée sur la figure) du canon pour que l'électron pénètre dans une région où règne seulement un champ magnétique $\vec{B}$, stationnaire et uniforme, dont la direction est perpendiculaire à la direction de la vitesse incidente de l'électron. La trajectoire de l'électron dans cette région devient circulaire.

3. Choisir un sens pour $\vec{B}$ et représenter la trajectoire de l'électron à la sortie du canon en justifiant votre tracé.

4. Montrer que le mouvement de l'électron est uniforme.

5. Établir l'expression du rayon R de sa trajectoire .

6. Lorsque l'électron quitte la région où règne le champ magnétique, que peut-on dire de son vecteur vitesse $\vec{v}_s$ et de sa trajectoire , choisir **après justification** une ou plusieurs des propositions suivantes :

    A) Le vecteur vitesse $\vec{v}_s$ possède une norme égale à 6×10^6 m.s^{-1}.

    B) Le vecteur vitesse $\vec{v}_s$ a la même direction que lorsque l'électron est rentré dans la région du champ magnétique.

    C) La trajectoire de l'électron est toujours circulaire.

    D) La trajectoire de l'électron est rectiligne.

7. On s'intéresse à l'angle θ_m , dit de déflexion magnétique, que forme la direction de $\vec{v}_s$ avec l'axe Ox lorsque A sort de la région du champ magnétique. Cet angle est $\theta_m=\sqrt{\frac{e}{2m_eV_a}}BL^{\alpha}$ où α un nombre réel et L la longueur de la trajectoire de l'électron dans la région du champ magnétique. À l'aide d'une analyse dimensionnel, déterminer la valeur de α.

PROBLÈME 2 : Étude d'une crosse de Hockey sur glace *(barème sur 20 points)*

Pour manipuler le palet, les joueurs utilisent une crosse de hockey composée d'un manche et d'une palette. La crosse est suspendue par l'extrémité supérieure du manche (point *O*) à un axe horizontal *(Oz)* fixe par une liaison pivot supposée parfaite et peut ainsi osciller. L'axe *(Oz)* est dirigé vers l'avant de la *figure 2*. L'écart de la crosse de hockey avec la verticale est repéré par l'angle θ.

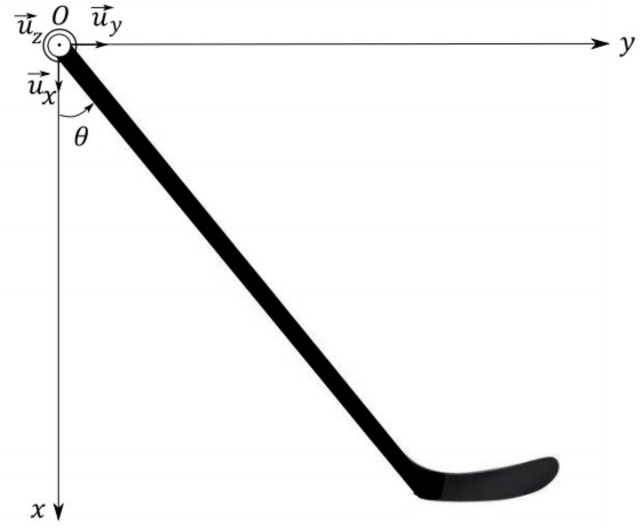


Figure 2 - Schéma de la crosse de hockey

La crosse possède :

- une masse totale *M*
- un centre de masse *G* qu'on considérera situé sur le manche avec $OG = h$
- un moment d'inertie total *J* (en kg.m^2) par rapport à l'axe *(Oz)*

Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont des vecteurs unitaires dirigés respectivement selon les axes *(Ox)*, *(Oy)* et *(Oz)*.

1) Rappeler la loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe orienté *(Oz)*. En l'appliquant et en négligeant les frottements de l'air, montrer que l'équation différentielle du mouvement de la crosse peut se mettre sous la forme : $J\ddot{\theta}+M\,g\,h\sin\theta=0$ (1)

2) Dans le cas d'oscillations de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre, réécrire l'équation (1). L'équation obtenue sera notée (2).

3) En déduire l'expression de la période T_0 des oscillations.

4) Établir une intégrale première du mouvement à partir de l'équation (1). Cette équation sera notée (3).

5) Expliquer en quoi cette équation (3) fait apparaître les différentes formes d'énergies. Vérifier, à partir des unités de base du Système International, que les différents termes sont homogènes à des énergies.

PROBLÈME 3 : La station spatiale internationale *(barème sur 56 points)*

La Station spatiale internationale, en abrégé ISS (nom anglais : International Space Station), est une station spatiale placée en orbite terrestre basse, occupée en permanence par un équipage international qui se consacre à la recherche scientifique dans l'environnement spatial. Dans tous le problème on assimile l'ISS à un point matériel M de masse m et la terre à un point matériel de masse M_T placé en O origine du référentiel géocentrique choisi comme référentiel d'étude.

Données: masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}\ kg$, constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}\ SI$, rayon de la Terre $R_T = 6400\ km$.

I.Caractéristiques générales du mouvement de l'ISS

1. Exprimer et représenter le force de gravitation exercée par la terre sur l'ISS en introduisant les paramètres nécessaires. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.

2. Montrer que le moment cinétique $\vec{L_O}(M)$ en O, centre du Soleil, de l'objet M de masse m est une constante du mouvement.

3. On utilise la base de projection cylindrique$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ tel que$\vec{L_O}(M) = L_O \vec{u}_z$. Justifier que le mouvement de M est plan , quel est ce plan ? Etablir l'expression de $C = r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$en fonction de L_O et m. Quel est le nom de cette grandeur , quelle est sa particularité?

II. l'ISS en mouvement circulaire

En première approximation, on peut considérer que l'ISS a un mouvement circulaire de centre O et de rayon R.

4. Grâce à la 2ème loi de Newton, déterminer la vitesse V de l'ISS en fonction de G, M_T et R .

5. On peut lire dans la presse que l'ISS décrit *15,5* orbites par jour. En assimilant sa trajectoire à un cercle , déterminer :
   5.1. Sa période de révolution en seconde
   5.2. Son altitude.
   5.3. Sa vitesse
   5.4. Son énergie mécanique sachant que l'ISS a une masse $m = 490\ t$.

III. l'ISS en mouvement elliptique

La trajectoire de l'ISS est en réalité une ellipse de demi grand axe a dont la terre est l'un des foyers, son altitude variant entre h_P = 330 km et h_A= 420 km.

6. Faire un schéma faisant apparaître le périgée P et l'apogée A de la trajectoire ainsi que les distances h_A, h_P, R_T, a et un point M quelconque de la trajectoire repéré par ses coordonnées polaires et la base polaire associée.

7. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire de l'ISS.

8. Déterminer la période de l'ISS.

9. Déterminer l'énergie mécanique de l'ISS.

10. Exprimer la norme v de la vitesse de l'ISS en un point quelconque de la trajectoire elliptique en fonction de M_T , G, r et a. Comment évolue-t-elle avec le rayon r ?

11. Déterminer les vitesses minimale et maximale de l'ISS.

12. Que pensez-vous de l'approximation d'un mouvement circulaire pour l'ISS ?

Fin de l'énoncé

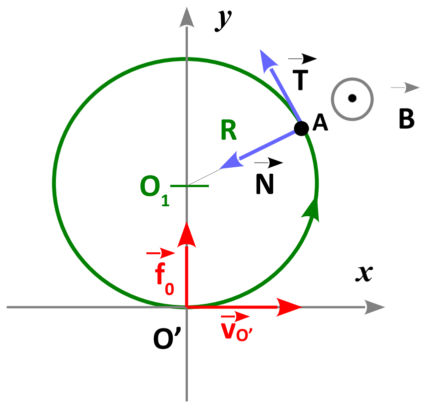
Correction devoir maison n°5 sciences physiques

PROBLÈME 1 : Électron accéléré et champ magnétostatique (d'après ENAC 2023)

1. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'électron entre le point O où il quitte la cathode et le point O' où il arrive à l'anode en négligeant le poids : $\frac{1}{2}mv_{O'}^2 - 0 = W_{\vec{F}_E}O \rightarrow O' = 0 - qV_a = eV_a$ d'où $\boxed{v_{O'} = \sqrt{2e\frac{V_a}{m}}}$.

2. AN : $\boxed{v_{O'} = 6{,}0.10^6\ m.s^{-1}}$

3. Quand l'électron pénètre dans la région où règne le champ $\vec{B}$, il est soumis à la force magnétique (poids négligeable) :
$\vec{f}_0 = -e\vec{v}_{o'} \wedge \vec{B} = -ev_{o'}\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = ev_{O'}B\vec{u}_y$ d'où la trajectoire orientée vers « le haut ».



4. Pour montrer que le mouvement est uniforme on applique le théorème de la puissance cinétique à l'électron au cours de son mouvement :
$\frac{dE_C}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}.\vec{v} = 0$ d'où E_c= cste d'où $\|\vec{v}\| = v_{0'} = cste$.

5. Dans référentiel terrestre de repère d'espace $R(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On exprime le vecteur vitesse et le vecteur accélération grâce à la base de Frenet . $\vec{v} = v_{0'}\vec{T}$ et $\vec{a} = \frac{v_{0'}^2}{R}\vec{N}$. La force magnétique est $\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -ev_{0'}\vec{T} \wedge B\vec{u}_z = ev_{0'}B\vec{N}$.

D'après la 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{f}$ d'où $m\frac{v_{0'}^2}{R} = ev_{0'}B$ en prenant la valeur absolue, on obtient : $\boxed{R = \frac{mv_{0'}}{eB}}$.

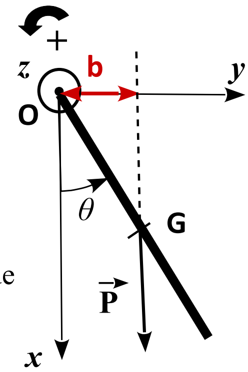
6. Dans la zone où l'électron est soumis au champ magnétique son mouvement est uniforme donc le vecteur $\vec{v}_s$ possède la même norme que $\vec{v}_{O'}$ égale à $6\times10^6\ m.s^{-1}$. **Rep A.** Ensuite la somme des forces s'exerçant sur l'électron peut être considérée comme nulle donc son mouvement est rectiligne uniforme. **Rep D.**

7. $\theta_m = \frac{eB}{m_e}\sqrt{\frac{m_e}{2eV_a}}L^\alpha$. D'un point de vue dimensionnel $[\theta_m] = 0$; $\left[\frac{eB}{m_e}\right] = T^{-1}$ d'après Q5 et $\left[\sqrt{\frac{m_e}{2eV_a}}\right] = TL^{-1}$ d'après Q1 , on en déduit $\left[\frac{eB}{m_e}\sqrt{\frac{m_e}{2eV_a}}L^\alpha\right] = T^{-1}TL^{-1}L^\alpha = L^{-1+\alpha}$ d'où . $\boxed{\alpha = 1}$.

PROBLÈME 2 : Étude d'une crosse de Hockey sur glace

1) Loi du moment cinétique :

Dans un référentiel galiléen, quand un solide en mouvement de rotation autour d'un axe Oz fixe orienté est soumis au moment des forces extérieures par rapport à Oz : $M_{Oz}(\overrightarrow{f_{iext}})$, alors :



$$\boxed{\frac{dL_{Oz}}{dt}=J\frac{d\omega}{dt}=\sum_i M_{Oz}(\overrightarrow{f_{iext}})} \quad (0)$$

Dans le cas présent, $\sum_i M_{Oz}(\overrightarrow{f_{iext}})=M_{Oz}(\vec{P})+M_{Oz}(liaison)$.

- $M_{Oz}(liaison)=0$ car la liaison pivot est supposée parfaite
- $M_{Oz}(\vec{P})=-M\,g\,b=-M\,g\,h\sin\theta$ où b est le bras de levier. Le signe – provient du fait que le poids fait tourner dans le sens négatif. (schéma ci-contre).

D'après (0) , on en déduit : $\boxed{J\ddot{\theta}+M\,g\,h\sin\theta=0}$.

2) Dans le cas d'oscillations de faible amplitude, $\sin\theta\approx\theta$, l équation précédente devient : $\boxed{J\ddot{\theta}+M\,g\,h\theta=0}$ (2).

3) L'équation (2) est du type $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$ avec $\omega_0=\sqrt{\frac{M\,g\,h}{J}}=\frac{2\pi}{T_0}$ d'où : $\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{J}{M\,g\,h}}}$.

4) D'après (1) , on en déduit : $J\ddot{\theta}\dot{\theta}+M\,g\,h\sin\theta\dot{\theta}=0$ d'où $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right)+\frac{d}{dt}(-M\,g\,h\cos\theta)=0$ soit :

$$\boxed{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2-M\,g\,h\cos\theta=cste} \quad (3)$$

5) L'équation (3) traduit la conservation de l'énergie.

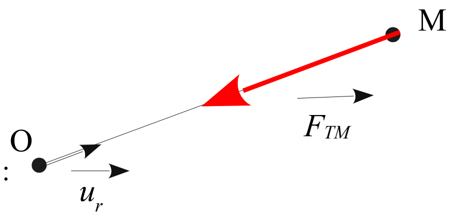
$\boxed{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2=E_c}$ est l'énergie cinétique du solide. <u>Unité</u> : kg m²s^{-2} = J *(le terme est bien homogène à une énergie).*

$\boxed{-M\,g\,h\cos\theta=-M\,g\,z_G=E_p}$ est l'énergie potentielle de pesanteur en considérant $E_p(z_G=0)=0$.

<u>Unité</u> : kg m s^{-2} m = kg m²s^{-2} = J *(le terme est bien homogène à une énergie).*

PROBLÈME 3 : La station spatiale internationale

I. Caractéristiques générales du mouvement de l'ISS

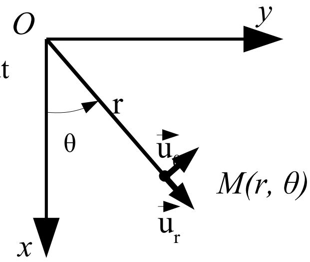


1. La force exercée par la terre (point O) sur l'ISS M de masse m est : .

$\boxed{\vec{F}_{TM}=\frac{-GmM_T}{r^2}\vec{u}_r}$. $[G]=\frac{[F][r^2]}{[M_S][m]}=\frac{MLT^{-2}L^2}{M^2}$ d'où les dimensions de G :

$\boxed{[G]=L^3M^{-1}T^{-2}}$ et son unité dans le système international : $\boxed{m^3kg^{-1}s^{-2}}$.

2. On applique le théorème du moment cinétique en O à l'ISS dans le référentiel géocentrique: $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt}=\vec{M}_0(\vec{F}_{TM})=\vec{OM}\wedge\vec{F}_{TM}=r\vec{u}_r\wedge\frac{-GM_Tm}{r^2}\vec{u}_r=\vec{0}$. On en déduit que $\vec{L}_O(M)=\vec{OM}\wedge m\vec{v}=\vec{cste}$.



A tout moment $\vec{OM}$ est orthogonal au moment cinétique . Or le moment cinétique est à tout moment suivant $\vec{u}_z$ donc $\vec{OM}$ est contenu dans le plan *(O,x,y)* à tout moment.

Conclusion : le mouvement est plan et le plan du mouvement est *(O,x,y)*.

On repère le point M grâce à ses coordonnées polaires (r, θ) :

$\vec{OM}=r\vec{u}_r$ et $\vec{v}=\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ d'où $\vec{L}_O(M)=\vec{OM}\wedge m\vec{v}=r\vec{u}_r\wedge m(\dot{r}\vec{u}_r+r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$ d'où

$\boxed{\vec{L}_O(M)=mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z=mC\vec{u}_z}$ d'où $\boxed{C=\frac{L_O}{m}}$.

C est la constante des aires , c'est une constante du mouvement.

II. l'ISS en mouvement circulaire

3. La trajectoire étant circulaire, r=R = cste d'où $\vec{V}=V\vec{u}_\theta=R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}=-R\dot{\theta}^2\vec{u}_R+R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta=\frac{-V^2}{R}\vec{u}_r+\frac{dV}{dt}\vec{u}_\theta$.

D'après la 2ème loi de Newton appliquée à l'objet dans le référentiel héliocentrique : $v=\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}=\sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11}\times6{,}0.10^{24}}{6400.10^3+403782}}=7669\,m.s^{-1}$. Par projection sur $\boxed{v=7{,}7\,km.s^{-1}}$, on en déduit que

$\boxed{E_m=\frac{-GmM_T}{2(R_T+h)}}$. AN : $\boxed{E_m=-\frac{6{,}67.10^{-11}\times6{,}0.10^{24}\times490.10^3}{2(6400.10^3+403782)}=-1{,}4.10^{13}J}$.

4. 1. La période de révolution de l'ISS est $\boxed{T=\frac{86400}{15{,}5}=5574\,s}$.

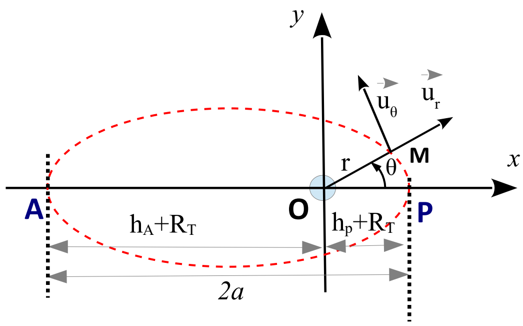
5.2. Pour déterminer l'altitude de l'ISS , on utilise la 3ème loi de Képler : $\frac{T^2}{(R_T+h)^3}=\frac{4\pi^2}{GM_T}$ d'où

$\boxed{h=\left(\frac{T^2GM_T}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}-R}$. AN : $h=\left(\frac{5574^2\times6{,}67.10^{-11}\times6{,}0.10^{24}}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}-6400.10^3=403782\,m$ donc $\boxed{h=404\,km}$

5.3. $v=\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}=\sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11}\times6{,}0.10^{24}}{6400.10^3+403782}}=7669\,m.s^{-1}$ soit $\boxed{v=7{,}7\,km.s^{-1}}$

5.4 . $\boxed{E_m=\frac{-GmM_T}{2(R_T+h)}}$ AN : $\boxed{E_m=-\frac{6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}\times 490.10^{3}}{2(6400.10^{3}+403782)}=-1{,}4.10^{13}\,J}$

III. l'ISS en mouvement elliptique



5. ci-contre

6. $\boxed{a=R_T+\frac{h_A+h_P}{2}}$ AN : $\boxed{a=6400+\frac{420+330}{2}=6775\,km}$

7. On utilise la 3ème loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM_T}$

d'où $\boxed{T^2=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}}$ AN : $\boxed{T^2=2\pi\sqrt{\frac{(6775.10^3)^3}{6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}}}=5537\,s}$

8. $\boxed{E_m=\frac{-GmM_T}{2a}}$ AN : $\boxed{E_m=-\frac{6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}\times 490.10^{3}}{2\times 6775.10^{3}}=-1{,}4.10^{13}\,J}$

9. Pour déterminer la vitesse, il faut partir de l'expression de l'énergie mécanique : $E_m=\frac{-GM_Tm}{2a}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GM_Tm}{r}$

d'où $\frac{1}{2}v^2=\frac{-GM_T}{2a}+\frac{GM_T}{r}$ d'où $\boxed{v=\sqrt{GM_T\left(\frac{-1}{a}+\frac{2}{r}\right)}}$. La vitesse diminue lorsque le rayon augmente.

10.

$\boxed{v_{min}=v_A=\sqrt{GM_T\left(\frac{-1}{a}+\frac{2}{R_T+h_A}\right)}}$ et $\boxed{v_{max}=v_P=\sqrt{GM_T\left(\frac{-1}{a}+\frac{2}{R_T+h_P}\right)}}$

AN : $\boxed{v_{min}=\sqrt{6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}\times\left(\frac{-1}{6775.10^3}+\frac{2}{6400.10^3+420.10^3}\right)}=7634\,m.s^{-1}=7{,}6\,km.s^{-1}}$

AN : $\boxed{v_{max}=\sqrt{6{,}67.10^{-11}\times 6{,}0.10^{24}\times\left(\frac{-1}{6775.10^3}+\frac{2}{6400.10^3+330.10^3}\right)}=7736\,m.s^{-1}=7{,}7\,km.s^{-1}}$

11. Les résultats sont peu différents de ceux obtenus pour le mouvement circulaire. Le mouvement circulaire constitue une bonne approximation.