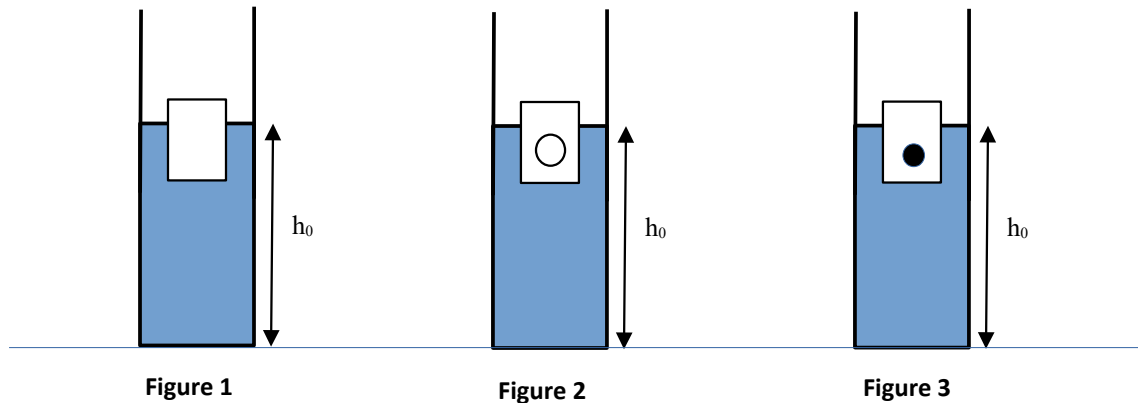


# Préparation devoir surveillé n°9 sciences physiques

*Les calculatrices ne sont pas autorisées. Une aide aux calculs est fournie en annexe.*

## Problème 1 : Fonte d'un glaçon (barème sur 35 points)

Un récipient cylindrique en verre de rayon  $R = 2,0 \text{ cm}$  contient un glaçon de volume  $V_0 = 15 \text{ cm}^3$  et de l'eau liquide. La hauteur initiale de l'eau dans le verre est  $h_0 = 10,0 \text{ cm}$  (figure 1 ci-dessous). La masse volumique de l'eau liquide est  $\rho_{\text{liq}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et celle de la glace est  $\rho_{\text{gl}} = 900 \text{ kg.m}^{-3}$ .



1. Déterminer l'expression littérale du volume immergé  $V_{\text{im}}$  du glaçon en fonction des données puis faire l'application numérique exprimée en  $\text{cm}^3$ .
2. Le glaçon fond et la hauteur d'eau finale dans le verre est  $h_1$ . Déterminer la différence  $h_1 - h_0$ .
3. L'eau liquide est remplacée par de l'eau salée, expliquer comment évolue le niveau de l'eau après la fonte du glaçon.

On remet de l'eau liquide non salée dans le verre. Le glaçon initial est remplacé par un glaçon contenant une petite bille de liège de masse volumique  $\rho_{\text{liège}} = 500 \text{ kg.m}^{-3}$  et de volume  $V_{\text{liège}} = 5 \text{ cm}^3$  (figure 2 ci-dessus). Le volume total (glace + bille) reste égal à  $V_0 = 15 \text{ cm}^3$ .

4. Déterminer littéralement puis numériquement le pourcentage de **volume émergé** par rapport au volume total  $V_0$ .
5. Le glaçon fond et la hauteur d'eau finale dans le verre est  $h_2$ . Déterminer la différence  $h_2 - h_0$ .

Le glaçon initial est remplacé par un glaçon contenant une petite bille d'aluminium de masse volumique  $\rho_{\text{Al}} = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$  et de volume  $V_{\text{Al}} = 5 \text{ cm}^3$  (figure 3 ci-dessus). Le volume total (glace + bille) reste égal à  $V_0 = 15 \text{ cm}^3$ .

6. Déterminer littéralement puis numériquement la valeur maximale  $V_{\text{Al,max}}$  de la bille pour que le glaçon flotte.

# Problème 2 : Phénomènes physiques en montagne

(barème sur 65 points)

## Introduction

Ce sujet propose d'étudier quelques phénomènes physiques rencontrés en montagne. Il est constitué de deux parties indépendantes. Les différentes sous-parties sont souvent également indépendantes.

Les questions portant la mention Résolution de problème ne sont pas guidées et nécessitent de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent apparaître sur la copie et, si elles sont pertinentes, seront valorisées. Le barème accorde un poids significatif à ces questions.

## I Le profil de pression

### I.1 Modèle de l'atmosphère isotherme

La pression atmosphérique décroît avec l'altitude. Cette partie propose d'étudier cet aspect. On choisit un axe  $z$  orienté vers le haut, on note  $p_0 = 1,0$  bar la pression atmosphérique au niveau du sol (en  $z = 0$ ) et  $p(z)$  sa valeur pour une altitude  $z$ . On modélise l'atmosphère comme étant :

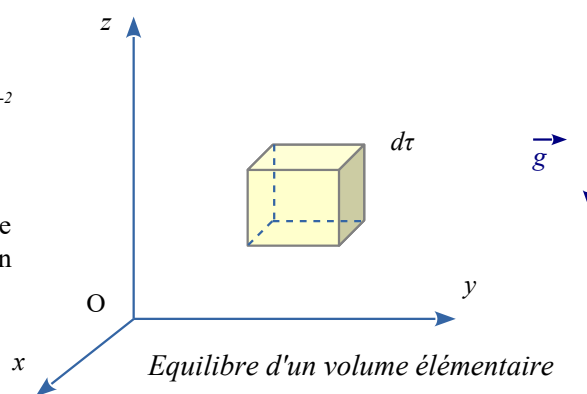
- statique,
- isotherme (température notée  $T_0$ , prise environ égale à  $15^\circ\text{C}$ ),
- et se comportant comme un gaz parfait.

Enfin, on note  $R = 8,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits,  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  l'intensité de la pesanteur, et  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$  la masse molaire de l'air.

On rappelle que  $T(\text{K}) = t^\circ\text{C} + 273$ .

1. Démontrer, à l'aide d'un bilan des forces sur un volume élémentaire  $d\tau = dx dy dz$  de fluide situé entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$ , que la pression satisfait à la relation suivante, où  $\rho$  est la masse volumique de l'air :

$$dp = -\rho g dz \quad (1)$$



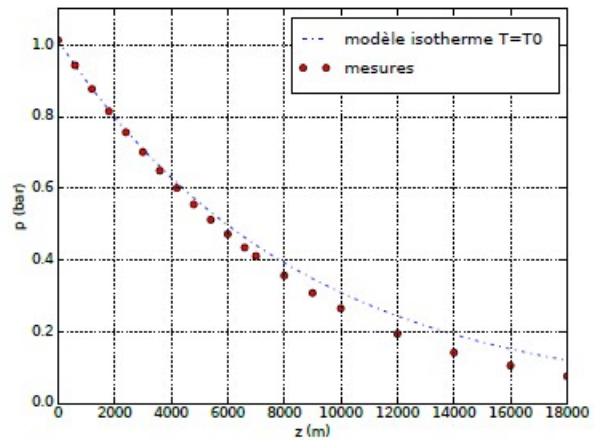
2. Établir la relation entre la masse volumique  $\rho(z)$  à l'altitude  $z$ , la pression  $p(z)$  à cette altitude,  $T_0$ ,  $R$  et  $M$ .
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $p(z)$ , puis en déduire que la pression évolue selon la loi  $p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$  avec  $H$  une constante dont on donnera l'expression en fonction de  $R$ ,  $T_0$ ,  $g$  et  $M$ .
4. Calculer une valeur approchée de  $H$ , sans oublier son unité.

On se propose d'analyser l'accord entre les prévisions du modèle précédent et les relevés expérimentaux. De tels relevés, valables pour des conditions moyennes, sont présentés dans le tableau page suivante (document 1). La pression  $p(z)$  donnée par ce tableau est également tracée sur le graphique du document 2, qui comporte aussi un tracé de la pression prédite par notre modèle. On pourra également utiliser le document 3.

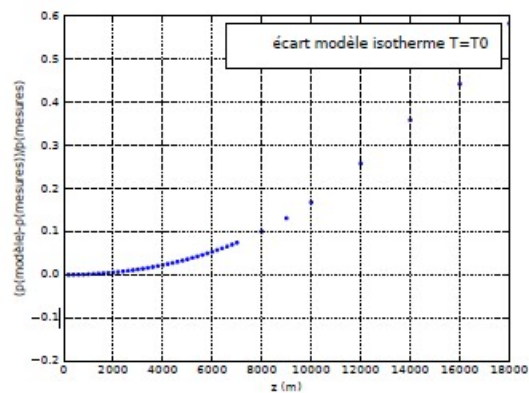
5. Jusqu'à quelle altitude les valeurs de la pression obtenues par ce modèle sont-elles en accord à mieux que 10% avec les données expérimentales ? Quelle est l'hypothèse de notre modèle qui semble la moins bien vérifiée, et qui peut expliquer les écarts importants à haute altitude ?

Altitude m	Température °C	Pression kPa	Accélération gravitationnelle g, m/s <sup>2</sup>
0	15,00	101,33	9,807
200	13,70	98,95	9,806
400	12,40	96,61	9,805
600	11,10	94,32	9,805
800	9,80	92,08	9,804
1 000	8,50	89,88	9,804
1 200	7,20	87,72	9,803
1 400	5,90	85,60	9,802
1 600	4,60	83,53	9,802
1 800	3,30	81,49	9,801
2 000	2,00	79,50	9,800
2 200	0,70	77,55	9,800
2 400	-0,59	75,63	9,799
2 600	-1,89	73,76	9,799
2 800	-3,19	71,92	9,798
3 000	-4,49	70,12	9,797
3 200	-5,79	68,36	9,797
3 400	-7,09	66,63	9,796
3 600	-8,39	64,94	9,796
3 800	-9,69	63,28	9,795
4 000	-10,98	61,66	9,794
4 200	-12,3	60,07	9,794
4 400	-13,6	58,52	9,793
4 600	-14,9	57,00	9,793
4 800	-16,2	55,51	9,792
5 000	-17,5	54,05	9,791
5 200	-18,8	52,62	9,791
5 400	-20,1	51,23	9,790
5 600	-21,4	49,86	9,789
5 800	-22,7	48,52	9,785
6 000	-24,0	47,22	9,788
6 200	-25,3	45,94	9,788
6 400	-26,6	44,69	9,787
6 600	-27,9	43,47	9,786
6 800	-29,2	42,27	9,785
7 000	-30,5	41,11	9,785
8 000	-36,9	35,65	9,782
9 000	-43,4	30,80	9,779
10 000	-49,9	26,50	9,776
12 000	-56,5	19,40	9,770
14 000	-56,5	14,17	9,764
16 000	-56,5	10,53	9,758
18 000	-56,5	7,57	9,751

**Document 1** : propriétés moyennes de l'air à haute altitude – en partie d'après relevés expérimentaux.  
(Source : *Thermodynamique, une approche pragmatique*, Çengel et al.)



**Document 2** :  $p(z)$  d'après les données du tableau du document 1 (points "mesures"), et d'après le modèle du sujet ("modèle isotherme  $T = T_0$ ").



**Document 3** : tracé de l'écart relatif entre mesures et modèle isotherme :  $(p_{\text{modèle}}(z) - p_{\text{mesures}}(z))/p_{\text{mesures}}(z)$ .

## I.2 Étude du profil de pesanteur

Nous avons ci-dessus supposé la pesanteur  $g$  constante. Or celle-ci est plus faible à haute altitude. On établit, grâce à un modèle où la terre est considérée comme une boule sphérique homogène, l'expression de l'intensité de la pesanteur  $g(r)$  en fonction de la distance  $r$  au centre de la Terre :

$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$$

expression valable pour  $r \geq R_T$ , avec  $R_T$  le rayon de la Terre,  $M_T$  sa masse, et  $G$  la constante de gravitation universelle.

6. En déduire l'expression de  $g$  en fonction de l'altitude  $z$  par rapport au sol, du rayon terrestre  $R_T$ , et de la valeur  $g_0$  de la pesanteur en  $z=0$ .

7. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en  $\frac{z}{R_T}$ , donner l'expression de  $g$  pour  $z \ll R_T$ .

8. De combien la pesanteur a-t-elle diminuée à une altitude de 6,4 km ? On prendra  $R_T = 6400$  km. Est-ce en accord avec le tableau de données du document 1 ?

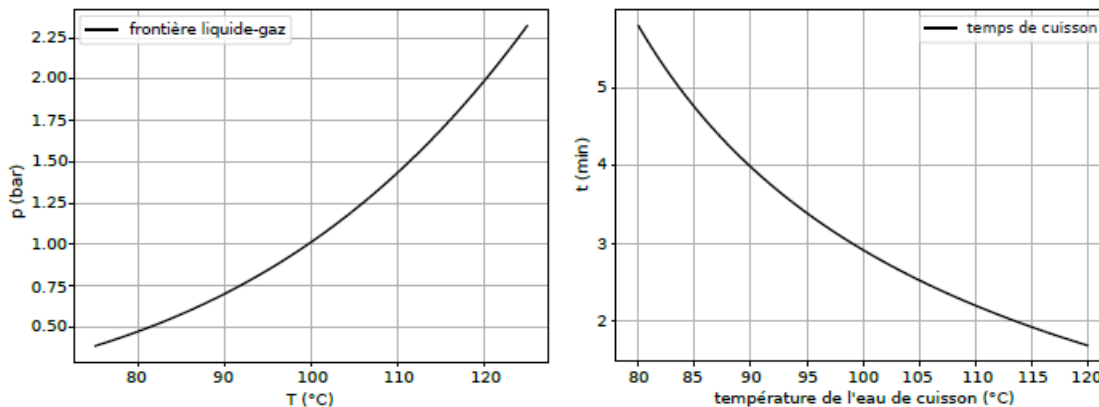
Ces très faibles variations justifient que l'on considère la pesanteur constante dans tout ce sujet.

### I.3 Effet de la chute de pression sur la cuisson des aliments

9. Sur votre feuille, dessiner l'allure du diagramme  $p-T$  de l'eau, où figurent les trois phases solide, liquide et gaz, le point triple et le point critique.

Des randonneurs préparent leur repas à une altitude de  $2400m$ . Ils souhaitent manger des œufs à la coque, pour lesquels on conseille traditionnellement une cuisson de 3 minutes dans l'eau bouillante.

La cuisson est bonne quand le jaune d'œuf atteint une température de  $63^\circ\text{C}$ . Un modèle simplifié permet d'obtenir le temps que doit passer l'œuf dans l'eau pour atteindre  $63^\circ\text{C}$ , en fonction de la température de l'eau dans laquelle il est plongé pour la cuisson (courbe ci-dessous à droite).



Document 4.

Gauche : zoom sur une portion du diagramme  $p-T$  de l'eau.

Droite : temps de cuisson pour obtenir un œuf à la coque, en fonction de la température de l'eau de cuisson

(source : <http://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/egg/>).

10. (Résolution de problème) Expliquer pourquoi le temps usuel de trois minutes ne sera pas adapté ici, et donner le temps de cuisson des œufs pour nos deux randonneurs. On utilisera au besoin tout document de la partie I.

## II Effet de foehn

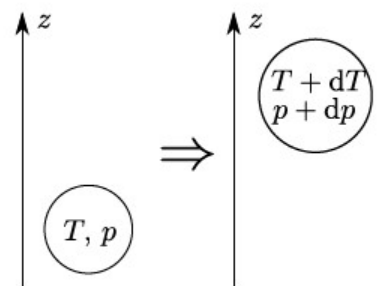
Lorsqu'un courant aérien rencontre un relief large, il s'élève, se détend et se refroidit. Puis en redescendant sur l'autre versant il est comprimé et se réchauffe. Dans certaines conditions qui brisent la symétrie (formation de nuages ou précipitations sur un des versants seulement), l'air redescendant peut arriver en bas avec une température significativement plus élevée qu'elle ne l'était en bas de l'autre versant : ce vent chaud et sec est appelé foehn. Il est très courant dans les vallées alpines, ainsi que dans d'autres régions du monde où il est nommé différemment. On en propose une étude dans cette partie.

Dans toute cette partie on modélise l'air comme un gaz parfait de masse molaire  $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$  et d'indice adiabatique (rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant)  $\gamma = 1,4$ . On note  $R = 8,3 \text{ J K}^{-1}\text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits, et  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$  l'intensité de la pesanteur.

### II.1 Gradient adiabatique sec

On s'intéresse d'abord aux variations de température subies par un volume d'air ascendant. On considère un axe  $z$  orienté vers le haut,  $z = 0$  étant au niveau du sol. On considère un volume élémentaire de fluide qui consiste en un volume fermé  $V$  d'air, situé à l'altitude  $z$ . Ce volume d'air est initialement à l'équilibre mécanique et thermique avec le reste de l'atmosphère, et on note  $\rho(z)$ ,  $p(z)$  et  $T(z)$  sa masse volumique, pression et température.

On suppose que le volume d'air s'élève brusquement d'une très petite hauteur  $dz$ . On note  $dp$  et  $dT$  les variations de pression et de température associées. On suppose cette transformation adiabatique et réversible.



Document 5

11. Quelle est la caractéristique de la transformation qui permet de la supposer adiabatique ?

12. Indiquer les conditions d'application de la loi de Laplace. En partant de la relation de Laplace qui relie pression et volume, établir la relation qui relie pression et température.

13. En déduire la relation suivante entre variation de pression et de température pour le mouvement considéré :

$$(1-\gamma)\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dT}{T} = 0$$

14. En déduire une expression de  $\frac{dT}{dz}$  en fonction de  $\frac{dp}{dz}$ ,  $\rho$ ,  $M$ ,  $\gamma$  et  $R$ .

15. En utilisant la relation (1) de la partie I, et la relation trouvée à la question précédente, en déduire une expression de  $\frac{dT}{dz}$  qui fait intervenir uniquement  $\gamma$ ,  $M$ ,  $g$  et  $R$ .

16. Calculer la valeur numérique approchée de  $\frac{dT}{dz}$  et l'exprimer en kelvins par kilomètre.

La valeur obtenue est appelée "gradient adiabatique sec", et donne la variation de température par kilomètre d'altitude lorsqu'une masse d'air s'élève de façon adiabatique et réversible.

## II.2 Effet des précipitations

On suppose maintenant que la masse d'air possède une certaine humidité lorsqu'elle est au niveau du sol, et qu'en s'élevant la vapeur d'eau contenue dans l'air va se liquéfier. On souhaite évaluer l'effet thermique de cette liquéfaction.

On donne :

- l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau :  $h_{vap} = 2,3 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ , supposée indépendante de la température,
- la capacité thermique massique à pression constante de l'air dans les conditions considérées ici :  $c_p = 1,0 \cdot 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ .

On considère le système isolé constitué de :

- une masse  $m_{air}$  d'air,
- une masse  $m_{vap}$  de vapeur d'eau ( $H_2O_{(g)}$ ), très petite devant  $m_{air}$ .

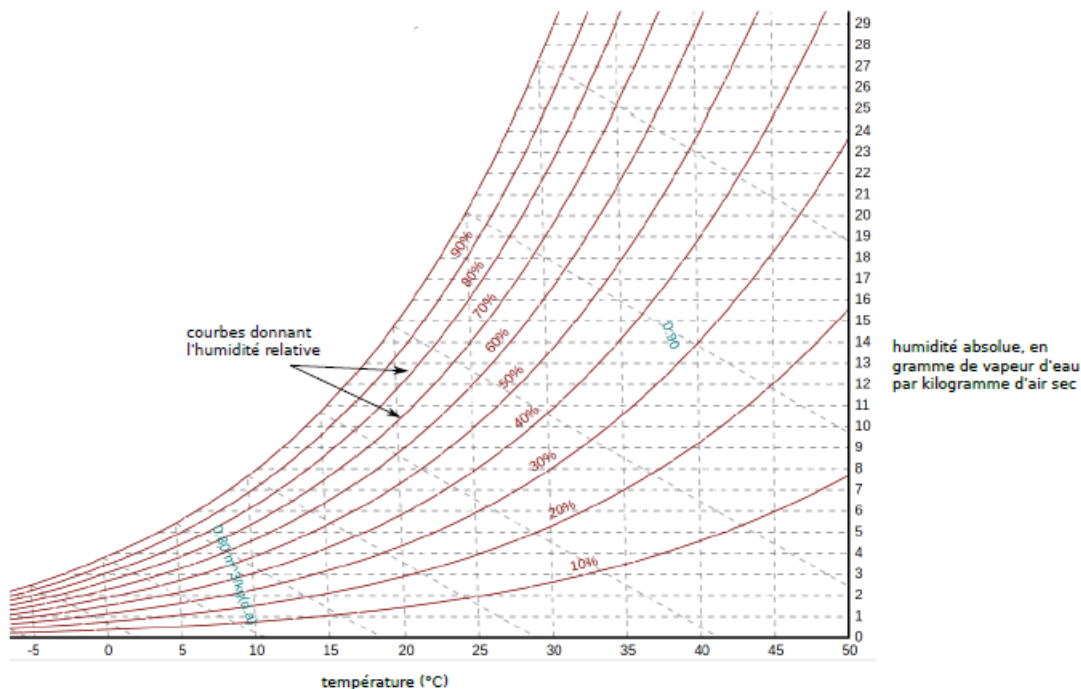
17. On suppose que la masse  $m_{vap}$  de vapeur d'eau se liquéfie, à température et pression constantes, et que les seuls échanges thermiques qui ont lieu prennent place entre l'eau et l'air du système. Exprimer le transfert thermique  $Q_{vap}$  reçu par la vapeur d'eau quand elle se liquéfie. En déduire l'expression du transfert thermique reçu par la masse d'air  $Q_{air}$  lors de cette transformation.

18. En supposant que l'air seul reçoit le transfert thermique précédent, de façon isobare, en déduire l'expression de son élévation de température  $\Delta T$  en fonction de  $m_{vap}/m_{air}$ ,  $h_{vap}$  et  $c_p$ .

Dans l'expression précédente, le rapport  $m_{vap}/m_{air}$  est appelé "humidité absolue" de l'air, souvent exprimée en gramme par kilogramme. Par exemple une humidité absolue de  $20 \text{ g/kg}$  signifie  $20 \text{ g}$  de vapeur d'eau par kilogramme d'air sec, soit donc  $m_{vap}/m_{air} = 20 \cdot 10^{-3}$ .

L'humidité relative de l'air est un autre paramètre mesuré par les météorologues. Elle s'exprime souvent en pourcentage, et elle dépend de l'humidité absolue et de la température.

Le diagramme psychrométrique ci-dessous permet d'obtenir l'humidité absolue en connaissant la température de l'air et son humidité relative.



Document 6, d'après <http://www.flycarpet.net/en/PsyOnline>.

19. Exploiter le graphique ci-dessus pour donner la valeur de  $m_{vap}/m_{air}$  pour  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  et  $70\%$  d'humidité relative.
20. En utilisant la valeur précédente du ratio  $m_{vap}/m_{air}$ , faire l'application numérique pour  $\Delta T$ .
21. Pourquoi aurait-on pu prévoir dès le départ que  $\Delta T > 0$  ?

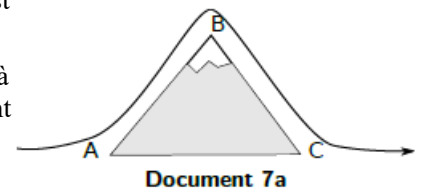
### II.3 Effet de foehn

On s'intéresse enfin à l'effet de foehn. On considère d'abord un cas où l'atmosphère est sèche. On se place dans le cadre de la partie II.1.

À cause du vent, une parcelle d'air s'élève le long d'une montagne dont le sommet est à l'altitude  $h = 1000\text{ m}$  (document 7a). On modélise cette élévation comme étant adiabatique et réversible.

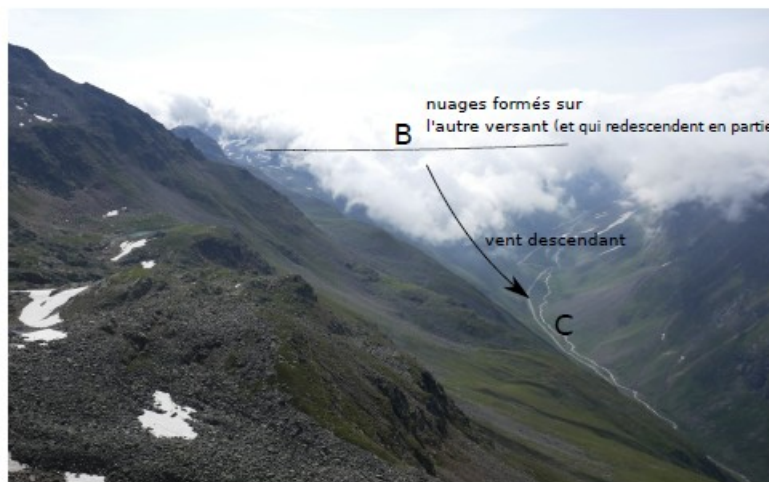
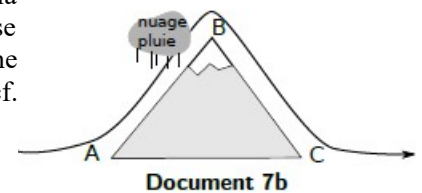
On prend par exemple  $T_A = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

22. Quelle est la valeur de la température de la parcelle d'air en  $B$  ?
23. La parcelle d'air redescend ensuite sur l'autre flanc de la montagne et retourne en  $z = 0$  (point  $C$ , de même altitude que  $A$ ). Quelle est la valeur de la température en  $C$  ? Commenter.



On se place ensuite dans un cas où l'air en  $A$  est humide. En montant sur le flanc de la montagne, sa température chute et la vapeur d'eau qu'il contient se liquéfie. On suppose qu'une fois en  $B$ , cette vapeur d'eau s'est totalement liquéfiée et a été évacuée sous forme de nuage ou de pluie. L'air est alors sec au point  $B$  et effectue sa descente jusqu'en  $C$  (cf. document 7b).

24. Estimer la valeur de la température en  $C$ . Commenter.



**Document 8** : exemple de manifestation de l'effet de foehn dans les Alpes. On voit nettement la formation de nuages sur le versant ascendant (versant non visible sur la photographie), alors qu'ils sont relativement absents du versant descendant (qui est celui visible sur la photographie).



# PROBLEME 3 : Étude d'une machine frigorifique à compression de vapeur

(barème sur 60 points)

On considère une machine frigorifique constituée d'un compresseur, d'un condenseur, d'un détendeur et d'un évaporateur, dans lesquels circule un fluide frigorigène R134a.

**Q1.** Sur un schéma de principe, identifier les différents transferts énergétiques qui interviennent au sein de la machine entre les différents éléments schématisés figure 1 ci-contre et donner leur signe.

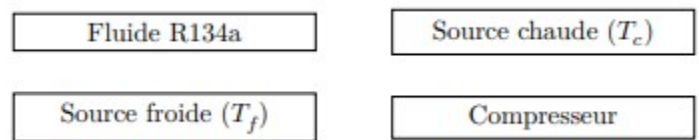


Figure 1

**Q2.** Quel est le rôle du condenseur et au contact de quel élément de la figure 1 doit-il être mis ?

Quel est le rôle de l'évaporateur et au contact de quel élément doit-il être mis ?

**Q3.** Définir le coefficient de performance (COP) de cette machine, puis exprimer le coefficient de performance de la machine de Carnot correspondante.

Pour toute la suite, on néglige toute variation d'énergie cinétique massique et d'énergie potentielle massique.

De plus, on suppose un régime

d'écoulement permanent au débit massique  $D_m = 0,2 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Pour simplifier, on considère la compression adiabatique et réversible.

Le détendeur D, calorifugé et sans parties mobiles, permet une chute de pression.

L'évaporateur EV et le condenseur CD sont des échangeurs thermiques isobares.

Les notations des états du fluide sont précisées sur la figure 2.

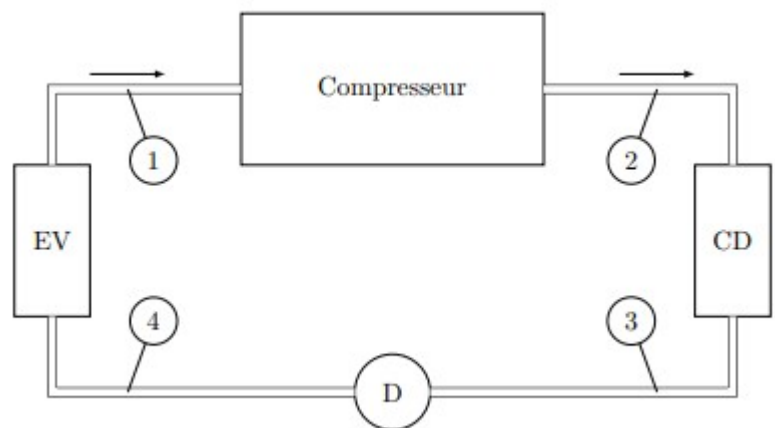


Figure 2

En écrivant le premier principe pour un kilogramme de fluide frigorigène en écoulement stationnaire unidimensionnel dans

un système à une entrée et une sortie, on montre que  $\Delta h = w_i + q$  (aussi appelé 1<sup>er</sup> principe industriel), où  $h$  est l'enthalpie massique,  $w_i$  le travail indiqué massique reçu de la part des parties mobiles de la machine et  $q$  le transfert thermique massique reçu.

**Q4.** Montrer que le fluide subit une détente isenthalpique dans le détendeur D.

La figure A du document réponse p7 (à rendre avec la copie) représente l'allure du cycle décrit par le fluide dans le diagramme dit « des frigoristes » enthalpie massique  $h$  (en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ ) en abscisse, pression  $P$  (en bar) en ordonnée, avec échelle logarithmique.

Aucune connaissance préalable de ce diagramme n'est requise.

Seul le point 1, à l'entrée du compresseur, est mentionné sur ce diagramme.

**Q5.** En repérant la courbe de saturation et les abaques de température, noter sur le diagramme (document réponse) les domaines où le fluide est à l'état liquide, vapeur sèche et vapeur-humide (ou mélange liquide-vapeur)

**Q6.** Dans quel sens doit être parcouru le cycle pour une machine frigorifique ?

**Q7.** Quelle est la forme des isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation ? Justifier.

Quelle est la forme des isothermes dans le domaine de la vapeur sèche ? Justifier lorsque l'on peut assimiler la vapeur sèche à un gaz parfait.

**Q8.** Sur le diagramme du frigoriste fourni en annexe, porter le numéro de chaque état du fluide (2, 3 et 4) dans chaque case prévue. Noter aussi sur le diagramme, pour chacune des quatre transformations, la nature de la transformation et l'organe (compresseur, condenseur, détendeur, évaporateur) traversé par le fluide dans chaque case prévue.

**Q9.** Compléter le tableau du document réponse en s'aidant du diagramme.

**Q10.** Exprimer, puis calculer, le travail massique indiqué  $w_{ic}$  reçu par le fluide dans le compresseur.

**Q11.** Exprimer, puis calculer, le transfert thermique massique  $q_f$  reçu par le fluide dans l'évaporateur.

**Q12.** En utilisant le débit massique, exprimer puis calculer la puissance frigorifique  $P_f$  de cette machine.

**Q13.** Calculer, le coefficient de performance de cette installation frigorifique. Le comparer au coefficient de performance de la machine de Carnot correspondante et interpréter la différence observée.

**Q14.** On souhaite améliorer la puissance frigorifique de 5 % en sous-refroidissant jusqu'à  $T'_3$  le fluide lors de la condensation isobare. En déduire  $h'_3$ , puis  $T'_3$  et la valeur du sous-refroidissement  $\Delta T$ .

**FIN DE L'ENONCE**



## Annexe

### Aide au calcul mental :

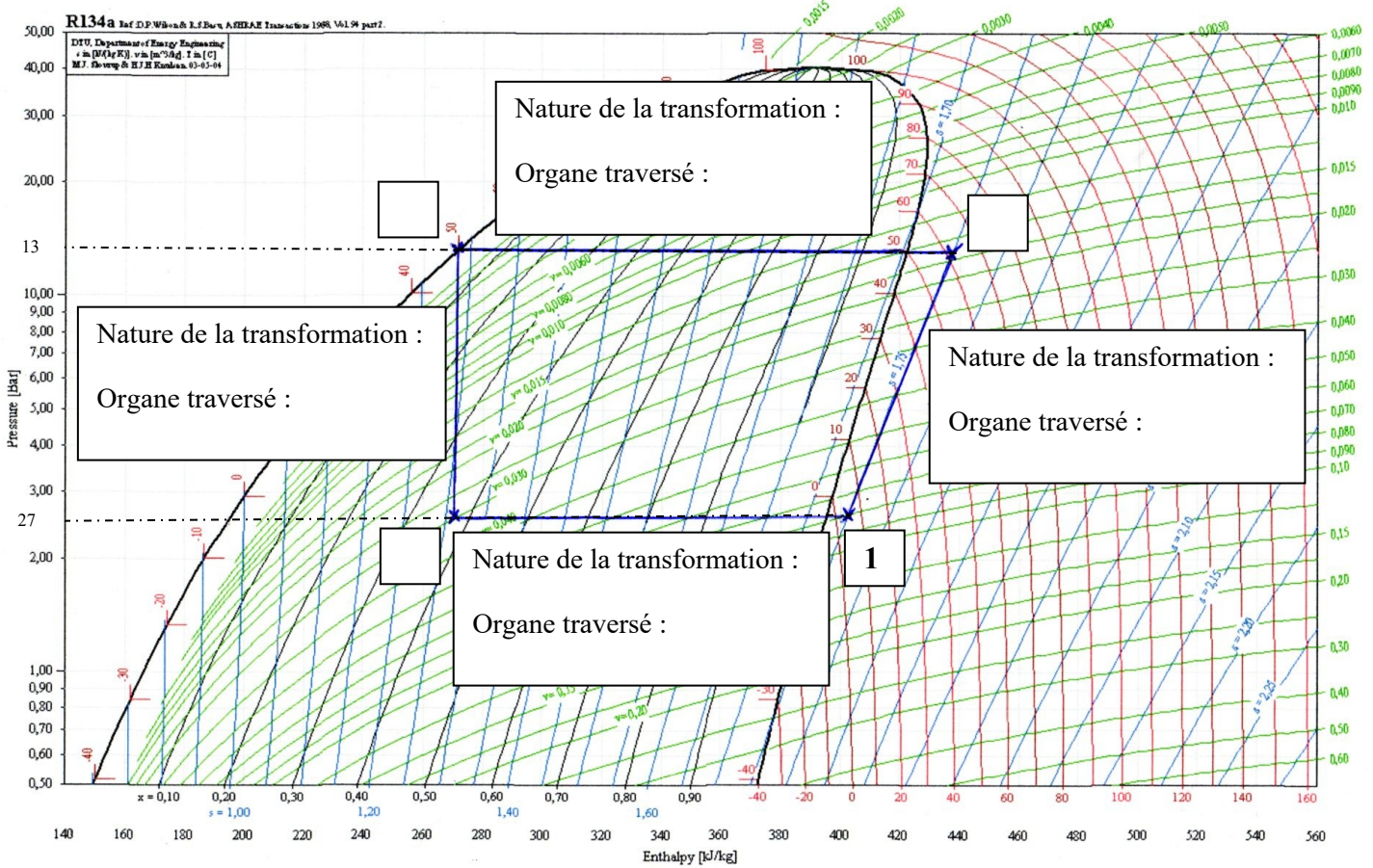
$\frac{115}{150} = 0,77$	$\frac{5}{6} = 0,83$	$\frac{8,3}{9,8} \approx 0,85$	$\frac{29 \times 0,4}{1,4} \approx 8,3$	$\frac{580}{71} \approx 8,2$	$9,807 \times 0,998 = 9,787$
$\frac{9,8}{3} = 3,3$	$\frac{0,5}{\sqrt{3}} = 0,289$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$	$\frac{0,289}{15} = 0,0193$	$\frac{0,577}{15} = 0,0385$	

### Développement limité à l'ordre 1

$$(1+u)^n = 1+nu \text{ si } u \ll 1$$

### Pour le problème 3

### Diagramme du frigorigère pour le fluide R134a pour Q5 et Q8:



### Pour Q9.

Etat du fluide	1	2	3	4
Pression (bar)				
Température (°C)				
Enthalpie massique (kJ.kg <sup>-1</sup> )				
Titre en vapeur				

# Préparation devoir surveillé n°9 sciences physiques

## Correction

### Problème 1 : Fonte d'un glaçon (d'après ENAC 2010)

1. Bilan des forces exercées sur le glaçon :

• Le poids :  $\vec{P} = m \vec{g} = \rho_{gl} V_0 \vec{g}$

• La poussée d'Archimède :  $\vec{\pi}_A = -\rho_{liq} V_{im} \vec{g}$

Le glaçon est en équilibre. D'après la 2<sup>ème</sup> loi de Newton (dans R galiléen):  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{\pi}_A + \vec{P} = \vec{0}$ .

D'où  $\rho_{gl} V_0 - \rho_{liq} V_{im} = 0$  d'où  $V_{im} = \frac{\rho_{gl}}{\rho_{liq}} V_0$ . AN  $V_{im} = \frac{900}{1000} \times 15 = 13,5 \text{ cm}^3$ .

2. Dans l'état initial la hauteur  $h_0$  correspond au volume d'eau liquide et au volume de glaçon immergé ainsi :

$$\pi R^2 h_0 = V_{liq} + V_{im} = V_{liq} + \frac{\rho_{gl}}{\rho_{liq}} V_0 \quad (1).$$

Dans l'état final la hauteur  $h_1$  correspond au volume d'eau liquide et au volume de glaçon fondu ainsi :

$\pi R^2 h_1 = V_{liq} + V_{fond}$ . Or si  $m_{gl}$  est la masse de glaçon, d'après la conservation de la masse  $m_{gl} = \rho_{gl} V_0 = \rho_{liq} V_{fond}$  d'où  $V_{fond} = \frac{\rho_{gl}}{\rho_{liq}} V_0$  d'où  $\pi R^2 h_1 = V_{liq} + \frac{\rho_{gl}}{\rho_{liq}} V_0$ . D'après la relation (1), on en déduit que  $h_1 - h_0 = 0$ .

3. Si on remplace l'eau liquide par de l'eau salée, l'eau salée a une masse volumique  $\rho_{liq}^{sal} > \rho_{liq}$  ainsi la poussée d'Archimède sera plus grande et le volume immergé moins important :  $V'_{im} = \frac{\rho_{gl}}{\rho_{liq}^{sal}} V_0$ .

Quand le glaçon fond  $V_{fond} = \frac{\rho_{gl}}{\rho_{liq}} V_0$  ne change pas ainsi la hauteur initiale  $h_0$  augmentera.

4. Bilan des forces exercées sur l'ensemble (glaçon+bille) :

Le poids :  $\vec{P} = m \vec{g} = [\rho_{gl}(V_0 - V_{liège}) + \rho_{liège} V_{liège}] \vec{g}$

La poussée d'Archimède :  $\vec{\pi}_A = -\rho_{liq} V_{im} \vec{g}$

Le système (glaçon + bille) est en équilibre. D'après la 2<sup>ème</sup> loi de Newton (dans R galiléen):  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{\pi}_A + \vec{P} = \vec{0}$ .

D'où  $\rho_{gl}(V_0 - V_{liège}) + \rho_{liège} V_{liège} - \rho_{liq} V_{im} = 0$  d'où  $V_{im} = \frac{\rho_{gl}(V_0 - V_{liège}) + \rho_{liège} V_{liège}}{\rho_{liq}}$ . Or  $V_{em} = V_0 - V_{im}$  d'où

$$V_{em} = V_0 - \frac{\rho_{gl}(V_0 - V_{liège}) + \rho_{liège} V_{liège}}{\rho_{liq}} \quad \text{d'où} \quad \frac{V_{em}}{V_0} = 1 - \frac{\rho_{gl}(V_0 - V_{liège}) + \rho_{liège} V_{liège}}{\rho_{liq} V_0}$$

$$\frac{V_{em}}{V_0} = 1 - \frac{900(15-5) + 500 \times 5}{1000 \times 15} = 1 - \frac{9000 + 2500}{15000} = 1 - \frac{11500}{15000} = 1 - \frac{115}{150} = 1 - 0,77 = 0,23 = 23\%$$

5. Dans l'état initial la hauteur  $h_0$  correspond au volume d'eau liquide et au volume de glaçon immergé ainsi :

$$\pi R^2 h_0 = V_{liq} + V_{im} = V_{liq} + \frac{\rho_{gl}(V_0 - V_{liège}) + \rho_{liège} V_{liège}}{\rho_{liq}} \quad (2).$$

Dans l'état final la hauteur  $h_2$  correspond au volume d'eau liquide + au volume de glaçon fondu + au volume de liège immergé ainsi :  $\pi R^2 h_2 = V_{liq} + V_{fond}^{gl} + V_{im}^{liège}$ .

D'après la conservation de la masse de glace  $m_{gl} = \rho_{gl}(V_0 - V_{liège}) = \rho_{liq} V_{fond}^{gl}$  d'où  $V_{fond}^{gl} = \frac{\rho_{gl}}{\rho_{liq}}(V_0 - V_{liège})$  (ce résultat peut se déduire de la question 2)

D'après la deuxième loi de Newton appliqué au liège dans l'état final  $\vec{P} + \vec{\pi}_A = \rho_{\text{liège}} V_{\text{liège}} \vec{g} - \rho_{\text{liq}} V_{\text{im}}^{\text{liège}} \vec{g} = \vec{0}$  d'où .  
 $V_{\text{im}}^{\text{liège}} = \frac{\rho_{\text{liège}}}{\rho_{\text{liq}}} V_{\text{liège}}$  . D'où  $\pi R^2 h_2 = V_{\text{liq}} + \frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{liq}}} (V_0 - V_{\text{liège}}) + \frac{\rho_{\text{liège}}}{\rho_{\text{liq}}} V_{\text{liège}}$  D'après la relation (2), on en déduit que

$$h_2 - h_0 = \frac{1}{\pi R^2} \left( V_{\text{liq}} + \frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{liq}}} (V_0 - V_{\text{liège}}) + \frac{\rho_{\text{liège}}}{\rho_{\text{liq}}} V_{\text{liège}} - V_{\text{liq}} - \frac{\rho_{\text{gl}} (V_0 - V_{\text{liège}}) + \rho_{\text{liège}} V_{\text{liège}}}{\rho_{\text{liq}}} \right) = 0$$

Rem : on aurait également pu comparer les deux volumes immergés avant et après fonte du glaçon.

6. Le calcul de  $V_{\text{im}}$  se fait de la même façon que dans la question 4 en remplaçant le liège par de l'aluminium d'où

$$V_{\text{im}} = \frac{\rho_{\text{gl}} (V_0 - V_{\text{Al}}) + \rho_{\text{Al}} V_{\text{Al}}}{\rho_{\text{liq}}} . \text{ Pour que le glaçon flotte, il faut que } V_{\text{im}} < V_0 \text{ d'où } \frac{\rho_{\text{gl}} (V_0 - V_{\text{Al}}) + \rho_{\text{Al}} V_{\text{Al}}}{\rho_{\text{liq}}} > V_0$$

$$\text{soit } V_{\text{Al}} (\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{gl}}) < V_0 (\rho_{\text{liq}} - \rho_{\text{gl}}) \text{ soit } V_{\text{Al}} < V_0 \frac{\rho_{\text{liq}} - \rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{gl}}} \text{ soit } V_{\text{Al}, \text{Max}} = V_0 \frac{\rho_{\text{liq}} - \rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{gl}}}$$

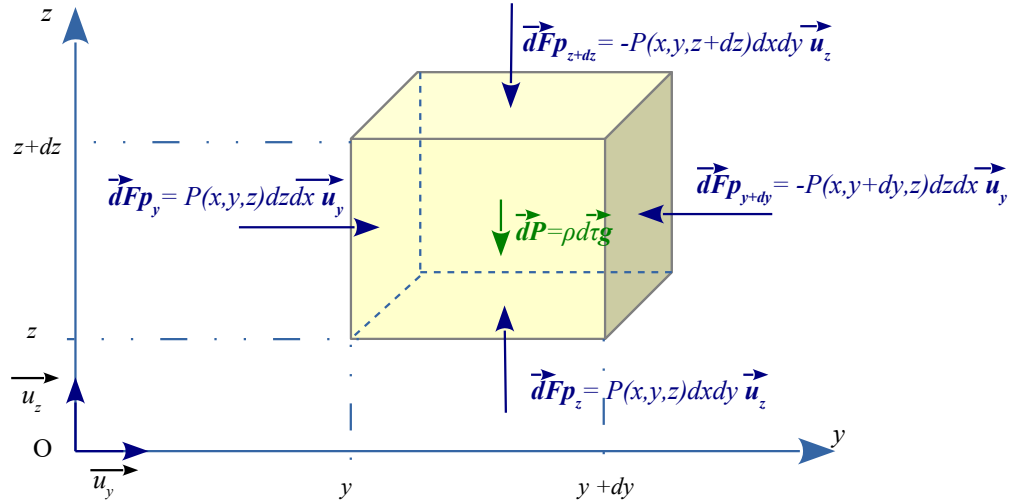
Application numérique :  $V_{\text{Al}, \text{Max}} = 15 \times \frac{1000 - 900}{2700 - 900} = \frac{1500}{1800} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} = 0,83 \text{ cm}^3$

# Problème 2 : Phénomènes physiques en montagne (d'après concours ATS 2022)

## I Le profil de pressions

### I.1 Modèle de l'atmosphère isotherme

1. Le volume  $d\tau$  est soumis au poids et aux forces pressantes.  $d\tau$  est en équilibre mécanique, d'après la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $\vec{dP} + \vec{dF}_p = \vec{0}$ .



- Suivant  $\vec{u}_x$  :  $\vec{dF}_{P_x} + \vec{dF}_{P_{x+dx}} = \vec{0}$  d'où  $p(x,y,z) dy dz - p(x+dx,y,z) dy dz = 0$  d'où  $p(x,y,z) = p(x+dx,y,z)$  on en déduit que la pression est indépendante de  $x$ .
- Suivant  $\vec{u}_y$  :  $\vec{dF}_{P_y} + \vec{dF}_{P_{y+dy}} = \vec{0}$  comme pour la variable  $x$ , on montre que la pression est indépendante de  $y$ .
- Suivant  $\vec{u}_z$  :  $\vec{dF}_{P_z} + \vec{dF}_{P_{z+dz}} + \vec{dP} = \vec{0}$  donc  $p(z) dy dx - p(z+dz) dy dx + \rho g dx dy dz = 0$  d'où :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

2. Le volume  $d\tau$  contient la masse  $dm = \rho d\tau$ . L'air est considéré comme un gaz parfait ainsi si  $M$  est la masse molaire de l'air alors  $p(z) d\tau = \frac{dm}{M} RT_0$ . On obtient alors :  $\rho(z) = \frac{p(z) M}{RT_0}$ .

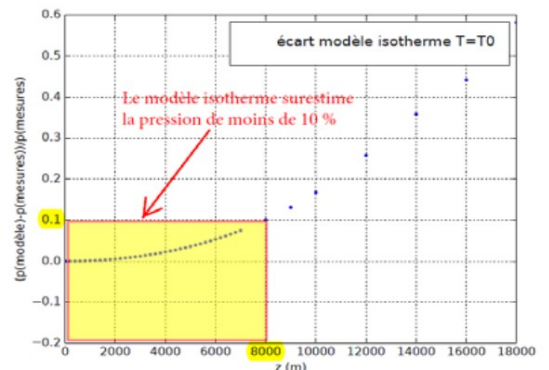
3. On sait que  $dp = -\rho g dz$ . En remplaçant  $\rho(z)$ , on obtient :  $dp = \frac{-p(z) M}{RT_0} g dz$ , d'où l'équation

différentielle :  $\frac{dp}{dz} + \frac{M g}{RT} p(z) = 0$ . Par intégration en posant  $p_0$  la pression au niveau du sol en  $z=0$ , on

obtient :  $p(z) = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}} = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$  avec  $H = \frac{RT}{Mg}$ .

4. AN :  $H = \frac{8,3 \times 288}{29,10^{-3} \times 9,8} \approx \frac{8,3 \times 290}{29,10^{-3} \times 9,8} \approx 8,5 \cdot 10^3 \text{ m} = 8,5 \text{ km}$ .

5. D'après le document 3, les valeurs de pression obtenues avec le modèle isotherme sont en accord à mieux de 10 % avec les données expérimentales pour des altitudes inférieures à 8000m. D'après le tableau du document 1, l'accélération gravitationnelle varie peu. Par contre, la température varie beaucoup plus soit environ 35K pour 10000m, c'est donc l'hypothèse la moins bien vérifiée du modèle et qui peut expliquer les écarts importants à haute altitude.



Document 3 : tracé de l'écart relatif entre mesures et modèle isotherme :  $(p_{\text{modèle}}(z) - p_{\text{mesures}}(z)) / p_{\text{mesures}}(z)$ .

## I.2 Étude du profil de pesanteur

$$6. r = R_T + z, \text{ or } g(r) = \frac{GM_T}{r^2} \text{ d'où } g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} \text{ et } g(z) = \frac{GM_T}{(R_T + z)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} \text{ d'où } \boxed{g(z) = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}}$$

$$7. g(z) = g_0 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} = g_0 \left(1 - 2 \frac{z}{R_T}\right) \text{ car } (1+u)^n = 1+nu \text{ si } u \ll 1.$$

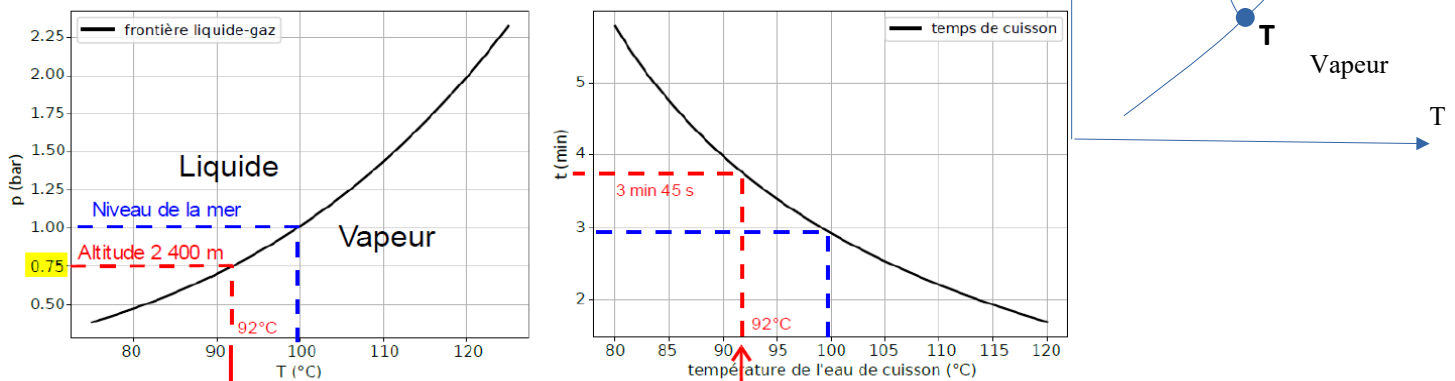
$$8. g(6,4) = 9,807 \left(1 - \frac{2 \times 6,4}{6400}\right) = 9,807 \left(1 - \frac{2}{1000}\right) = 9,807 \times 0,998 = 9,787 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \text{ On retrouve exactement la valeur du tableau.}$$

## I.3 Effet de la chute de pression sur la cuisson des aliments

9. Diagramme (P,T) de l'eau (ci-contre)

10. A 2400m la pression est de 75,63 kPa d'après le document 1.

A cette pression l'eau bout à 92°C. Le temps de cuisson est alors de 3min 45s alors qu'au niveau de la mer il est de a peine 3min car l'eau bout à 100°C. (ci-dessous)



## II. Effet de Foehn

### II.1 Gradient adiabatique sec

11. La rapidité de la transformation empêche les échanges thermique.

12. Pour pouvoir appliquer la loi de Laplace, il faut que le système soit un gaz parfait t qu'il subisse une transformation adiabatique réversible. La loi de Laplace qui relie pression et volume est :  $pV^\gamma = cste$ . Comme l système est un gaz parfait  $V = \frac{nRT}{p}$  d'où  $p \left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = cste$  d'où  $p \left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = cste$  d'où  $\boxed{p^{(1-\gamma)} T^\gamma = cste}$

13. Dans un premier temps, on prend le ln de l'expression précédente soit :  $(1-\gamma) \ln p + \gamma \ln T = \ln(cste)$ , puis

on fait la différentielle :  $(1-\gamma) d(\ln p) + \gamma d(\ln T) = d(\ln(cste)) = 0$  d'où :  $\boxed{(1-\gamma) \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dT}{T} = 0}$ .

14. De l'expression précédente on tire :  $\frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{dp}{p}$  soit  $\frac{dT}{dz} = \frac{T}{p} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{dp}{dz}$  or  $\rho = \frac{pM}{RT}$  d'où  $\frac{T}{p} = \frac{M}{R\rho}$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{dT}{dz} = \frac{M}{R\rho} \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{dp}{dz}}$$

$$15. \frac{dp}{dz} = -\rho g \text{ d'où } \boxed{\frac{dT}{dz} = \frac{Mg(1-\gamma)}{R\gamma}}$$

$$16. \text{AN : } \boxed{\frac{dT}{dz} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \times 9,8}{8,3} \frac{(-0,4)}{1,4} = -9,8 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1} = -9,8 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}}$$



## II.2 Effet des précipitations

17. Quand la vapeur d'eau se liquéfie  $\Delta H_{vap} = -m_{vap} h_{vap} = Q_{vap}$  car l'eau subit une transformation à pression constante.

le système {eau + air} est isolé et à pression constante.  $\Delta H_{vap} + \Delta H_{air} = Q_{vap} + Q_{air} = 0$  donc

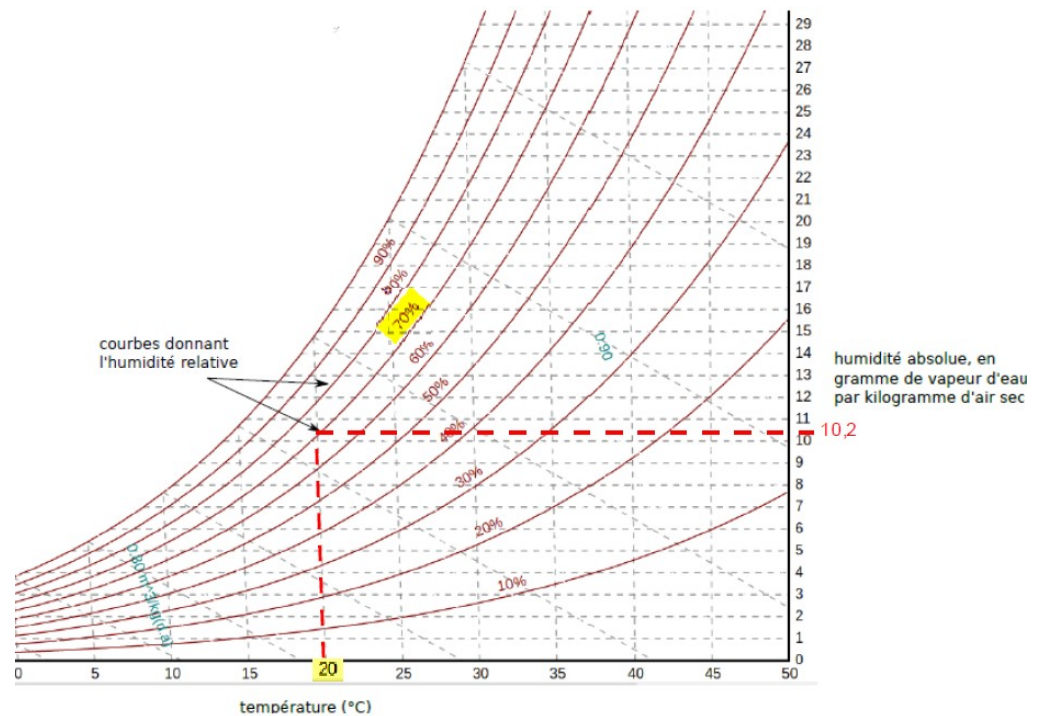
$$Q_{air} = -Q_{vap} = m_{vap} h_{vap}$$

18. On peut assimiler l'air à un gaz parfait si bien que  $\Delta H_{air} = m_{air} c_p \Delta T$  ainsi

$$\Delta T = \frac{m_{vap} h_{vap}}{m_{air} c_p}$$

19. En exploitant le document 6, on trouve

$$\frac{m_{vap}}{m_{air}} = 10,2 \cdot 10^{-3}$$



20. AN : 
$$\Delta T = \frac{10,2 \cdot 10^{-3} \times 2,3 \cdot 10^6}{1,0 \cdot 10^3} = 10,2 \times 2,3 \approx 23 \text{ K}$$

21. La liquéfaction libère de l'énergie.

## II.3 Effet de Foehn

22. D'après la question 16, le gradient adiabatique est de  $-9,8 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$  donc  $T_B = T_A - 9,8 = 10,2^\circ \text{C}$ .

23. L'air redescend de 1000m de l'autre côté. Les transformations étant considérées comme réversibles, la compression suit le chemin inverse de la détente donc  $T_C = T_A = 20^\circ \text{C}$  car C est à la même altitude que A.

24. Pour tenir compte de la liquéfaction il faut augmenter B de 23K donc  $T_B' = 10,2^\circ \text{C} + 23 = 33,2^\circ \text{C}$ .

Pour la descente le gradient adiabatique est de  $+9,8 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ , cette fois-ci l'air est sec donc

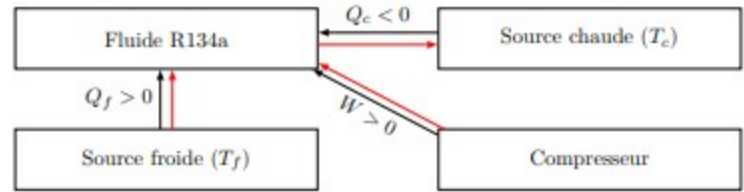
$$T_C' = T_B' + 9,8 = 33,2 + 9,8 = 43^\circ \text{C}$$



### PROBLEME 3 : Étude d'une machine frigorifique à compression de vapeur

(D'après Centrale Supélec TSI 2020)

**Q1.** Le fluide R134a échange  $Q_f > 0$  avec la source froide. Il échange  $Q_c < 0$  avec la source chaude et il reçoit  $W > 0$  au niveau du compresseur.



**Q2.** Le condenseur permet la condensation du fluide frigorifique : ce dernier fournit donc un transfert thermique à l'extérieur, il doit donc être mis au contact de la **source chaude**.

1. L'évaporateur permet l'évaporation du

**fluide** frigorifique : il faut donc fournir un transfert thermique positif au fluide, il doit donc être mis au contact de la **source froide**.

**Q3.** Le coefficient de performance est le rapport de la grandeur utile (ici le transfert thermique prélevé par le fluide à la source froide, soit  $Q_f$ ) et de la grandeur coûteuse (ici le travail donné au fluide par le compresseur,

soit  $W$ ) : Soit  $COP = \left| \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur dépensée}} \right| = \left| \frac{Q_f}{W} \right|$ .

Or on a vu que :  $W > 0$  donc  $|W| = W$ ;  $Q_f > 0$  donc :  $|Q_f| = Q_f$ . Ainsi :  $COP = \frac{Q_f}{W}$ .

**Q1.** Cycle de Carnot :

$W + Q_c + Q_f = 0$  Donc :  $W = -Q_c - Q_f$ . Ainsi :  $COP = \frac{-Q_f}{Q_c + Q_f} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}}$ .

De plus l'inégalité de Clausius donne :  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$ ; Donc :  $\frac{Q_c}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{T_f}$  Et :  $\frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f}$

Donc :  $1 + \frac{Q_c}{Q_f} \leq 1 - \frac{T_c}{T_f}$ . Et :  $\frac{1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \geq \frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_f}}$  Ainsi :  $\frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \leq \frac{-1}{1 - \frac{T_c}{T_f}}$  ; D'où :  $COP \leq \frac{T_f}{T_c - T_f} = COP_{Carnot}$ .

**Q4.** Le fluide est en écoulement stationnaire dans le détendeur D, donc on peut lui appliquer le 1<sup>er</sup> principe industriel fourni dans l'énoncé :  $\Delta h = w_i + q$ .

De plus, il est précisé dans l'énoncé que le détendeur est calorifugé (donc  $q = 0$ ) et sans parties mobiles (donc  $w_i = 0$ ). D'où :  $\Delta h = 0$ . Le fluide subit bien une détente isenthalpique dans D.

**Q5.** Voir graphe en annexe. (A gauche : **liquide** ; Sous la courbe : **mélange** et à droite : **gaz**).

**Q6.** Le cycle de toute **machine réceptrice** est parcouru dans le **sens trigonométrique**, en diagramme de Clapeyron, mais aussi dans un diagramme  $(p; h)$ . Car  $W_{cycle} > 0$ .

**Q7.** A l'intérieur de la courbe de saturation se font les changements d'états. Or ceux-ci sont isobares et isothermes. Donc les isothermes sont confondues avec les isobares. Ainsi ce sont des **droites horizontales**.

**Q2.** Dans le domaine de la vapeur sèche, si on assimile le comportement du fluide à celui d'un gaz parfait :

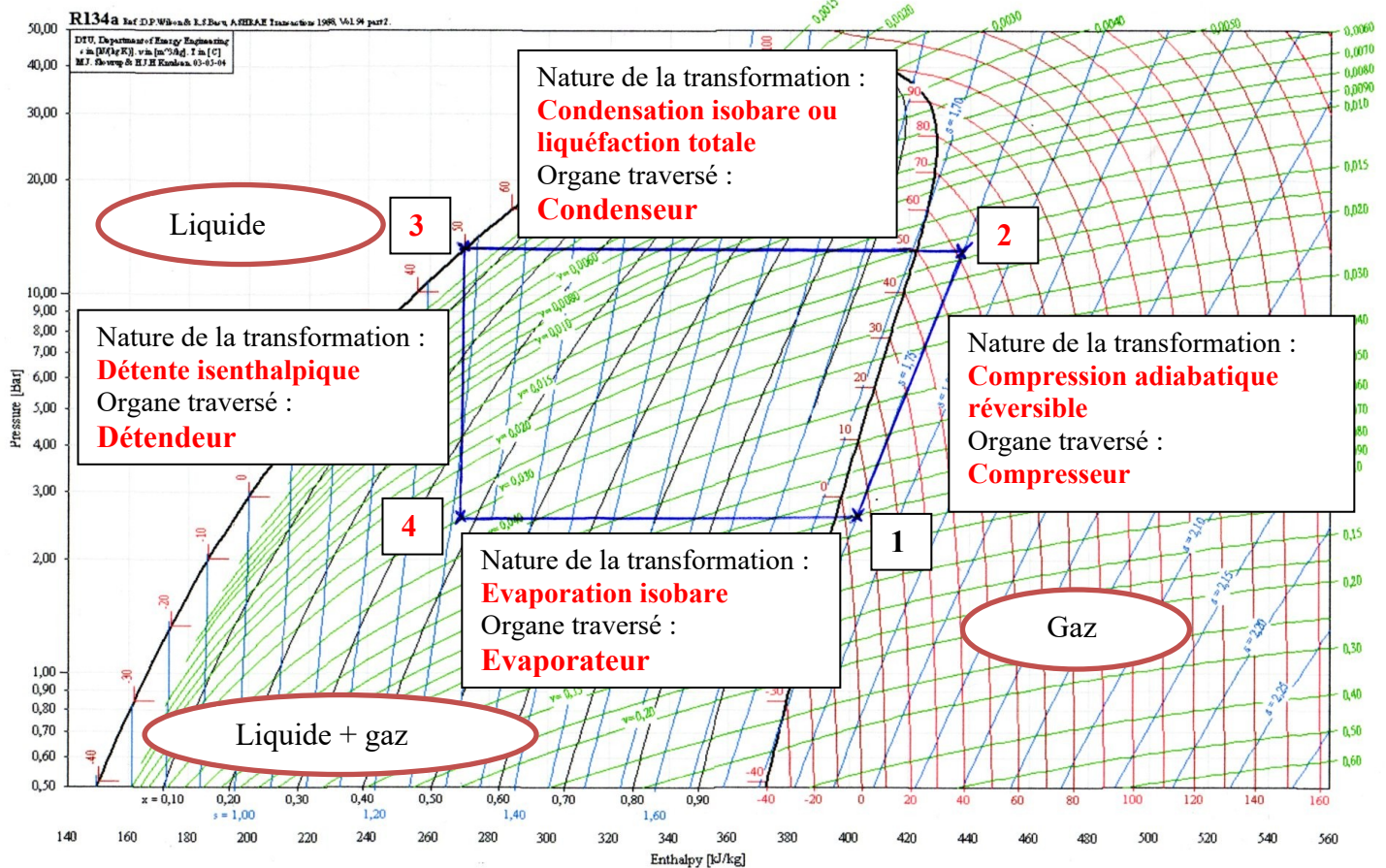
Pour un GP, on sait que  $\Delta H = C_p \Delta T$ , ou on sait aussi qu'un GP satisfait à la 2<sup>ème</sup> loi de Joule, donc dans ce domaine, les isothermes sont confondues avec les isenthalpes. Ce sont donc des **droites verticales**.

C'est ce que l'on constate sur le **diagramme dans le domaine des faibles pressions**.

**Q8.** Voir graphe en annexe.

**Q9.** Tableau ; On lit sur le diagramme et pour  $x_4$ , on utilise le théorème des moments (en cm par exemple).

état du fluide	1	2	3	4
Pression (bar)	2,7	13	13	2.7
Température (°C)	5	60	50	-4



**Q10.** Dans le compresseur, on voit sur le graphe que la transformation 1 → 2 est **isentropique**, c'est-à-dire qu'elle est **adiabatique** et réversible, ainsi  $q=0$ .

Le fluide est en écoulement stationnaire dans le compresseur, donc on peut lui appliquer le 1<sup>er</sup> principe industriel fourni dans l'énoncé :  $\Delta h = w_i + q$ .

De plus, il est précisé dans l'énoncé qu'au niveau du compresseur le fluide reçoit  $w_{ic}$ .

D'où :  $w_{ic} = \Delta h_{12} = h_2 - h_1$ . AN :  $w_{ic} = 435 - 405$  ; On obtient  $w_{ic} = 30 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

**Q11.** Dans l'évaporateur EV, il n'y a pas de parties mobiles, donc  $w_i = 0$ .

Le 1<sup>er</sup> principe industriel fourni dans l'énoncé :  $\Delta h = w_i + q$  va se simplifier en  $q_f = \dot{V} \Delta h_{41} = h_1 - h_4$ . AN :

$q_f = 405 - 270$  ; On obtient  $q_f = 135 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

**Q12.** On sait que  $P_f = D_m q_f$  ; AN :  $P_f = 0,2 \times 135\,000$  ; On obtient  $P_f = 27\,000 \text{ kW} = 27 \text{ kW}$ .

**Q13.** On a vu en Q3 que  $COP = \frac{q_f}{w_{ic}}$ . AN :  $COP = \frac{135}{30}$  ; On obtient  $COP = 4,5$ .

D'autre part, on a vu aussi que  $COP_{Carnot} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$ . En supposant que les températures des thermostats sont celles des

changements d'état, on lit :  $T_f = T_4 \approx -4^\circ\text{C}$  et  $T_c = T_3 \approx 50^\circ\text{C}$ . AN :  $COP_{Carnot} = \frac{269}{323 - 269}$  ; On obtient

$COP_{Carnot} \approx 5$ .

On a bien  $COP < COP_{Carnot}$  ; Les **transformations n'étant pas parfaitement réversibles**.

**Q14.** Pour augmenter la puissance frigorifique de 5%, il faut passer  $q_f$  de 135 à  $q'_f = 142 \text{ kJ.kg}^{-1}$

Or  $q'_f = h_1 - h'_4$  et  $h_1 = 405 \text{ kJ.kg}^{-1}$ . Il faut donc  $h'_4 = h_1 - q'_f$  ;

AN :  $h'_4 = 405 - 142 \approx 263 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

De plus, comme la détente 3 → 4 est isenthalpique, on a  $h'_4 = h'_3 = 263 \text{ kJ.kg}^{-1}$

On lit ainsi graphiquement, pour  $p_3 = 13 \text{ bar}$  et  $h'_3 = 263 \text{ kJ.kg}^{-1}$  :  $T'_3 \approx 42^\circ\text{C}$ .

**Enfin**,  $\Delta T = T'_3 - T_3$  ; AN :  $\Delta T = 42 - 50$  ;  $\Delta T = -8^\circ\text{C}$ .

