DS3

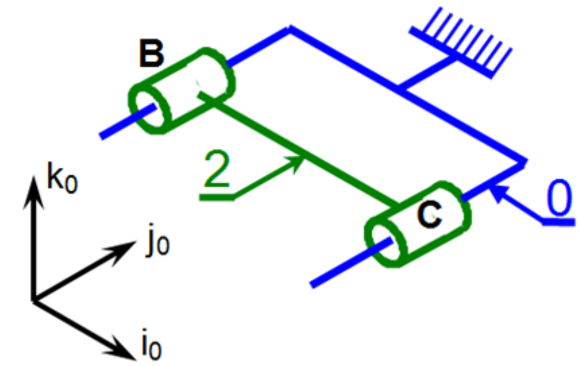
Durée 2 heures - Calculatrices autorisées

Le sujet comporte 2 exercices sur les chaînes de solide et 3 exercices sur la dynamique.

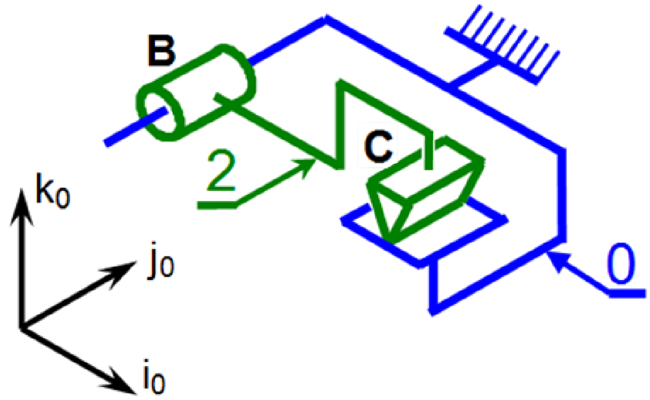
Le candidat est invité à formuler toute hypothèse qui lui semblerait nécessaire pour pouvoir répondre aux questions posées. Tous les résultats seront encadrés.

1- Guidage en translation

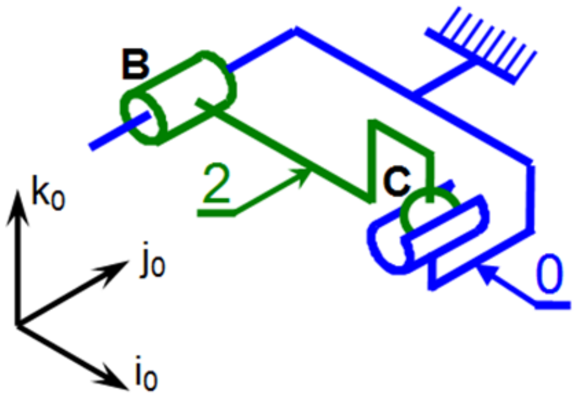
On propose ci dessous 4 associations de liaisons



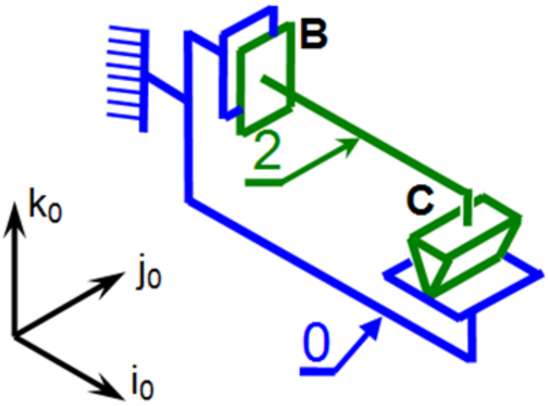
Cas 1



Cas 2



Cas 3



Cas 4

1-1- Sans calcul, donner la liaison équivalente entre 0 et 2.

1-2- Dans chacun des cas :

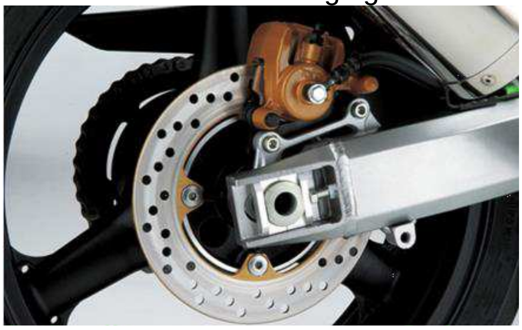
- déterminer la mobilité m;
- déterminer le degré d'hyperstatisme h;
- si besoin, identifier les contraintes géométriques qui doivent être assurées afin que l'hyperstatisme ne pose pas de problème lors du montage.

1-3- Proposer, en conservant la liaison pivot glissant d'axe (B, $\overrightarrow{j_0}$) , une autre solution pour avoir un mécanisme isostatique.

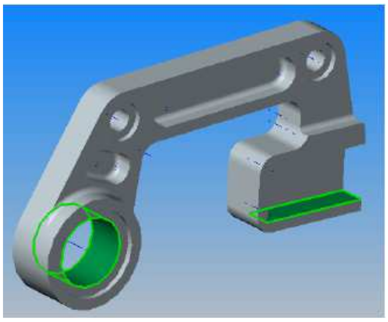
2- Support d'étrier de frein de moto

La KAWASAKI NINJA ZX-6RR, d'une puissance maximale de 118ch (1ch ≈ 735W) est une moto destinée à une utilisation à la fois routière et sportive sur circuit.

Sur cet engin, un dispositif permet de rendre mobile, par rapport au bras oscillant, le support d'étrier de frein arrière lors du réglage de la tension de la chaîne.



Roue arrière



Maquette numérique du support d'étrier

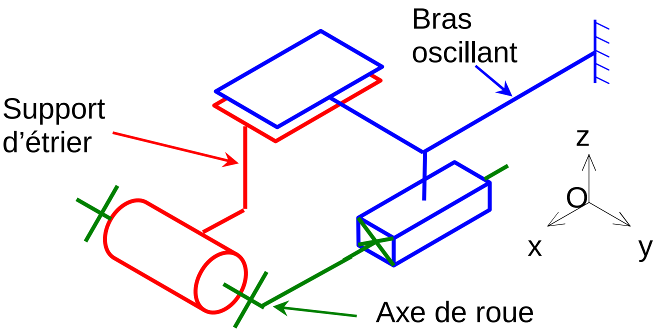


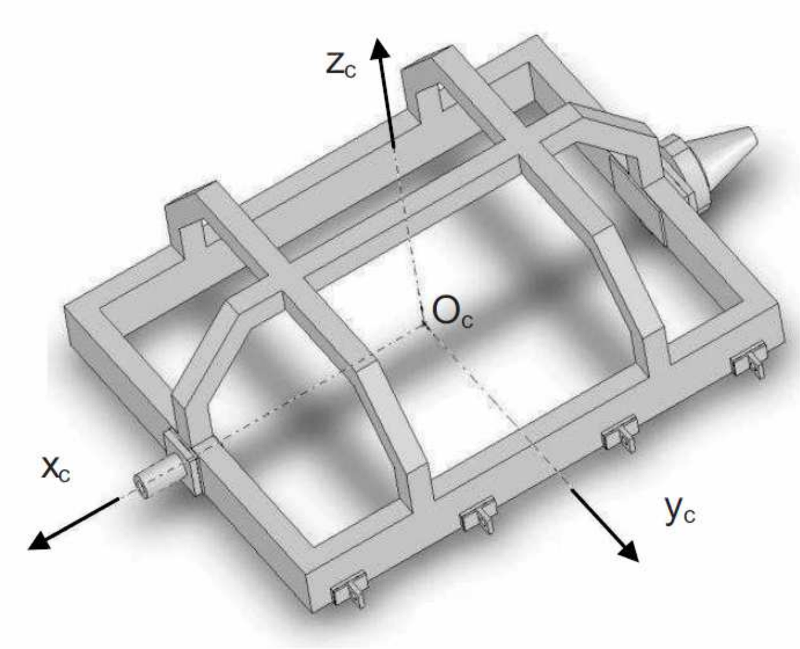
Schéma cinématique en phase de réglage de la tension de la chaîne

2-1- À l'aide du schéma cinématique ci-dessus déterminer le degré d'hyperstatisme du mécanisme composé du support d'étrier, du bras et de l'axe de roue.
2-2- À supposer que l'ensemble axe de roue et bras oscillant soit de géométrie parfaite, en déduire le nombre de contraintes géométriques à respecter par le support d'étrier. Proposez, à l'aide de croquis ou schémas, des défauts d'orientation ou de position relative entre les surfaces du support d'étrier réalisant les liaisons qui poseraient un problème lors du montage du mécanisme.
2-3- Proposer une modification des liaisons pour rendre le système isostatique. Justifier. Faire le schéma cinématique spatial de notre solution

En phase d'utilisation de la moto, la liaison glissière est bloquée. On a donc une liaison complète entre le bras oscillant et l'axe de roue.
2-4- Déterminer le degré d'hyperstatisme du système composé du support d'étrier, du bras et de l'axe
de roue. Quel est l'intérêt dans ce cas d'avoir un montage hyperstatique ?
2-5- Donner, sans calcul, le nom et le torseur des actions transmissibles par la liaison équivalente entre le support d'étrier et l'ensemble axe de roue et bras oscillant.

3- Cadre support de moule

Objectif : Déterminer les caractéristiques inertielles nécessaires par la suite pour assurer les déplacements d'un moule d'un poste à l'autre.
Le système étudié est un support de moules en liaison pivot avec le bâti autour de l'axe (O_C, $\overrightarrow{x_c}$).
2 moules sont fixés sur ce cadre

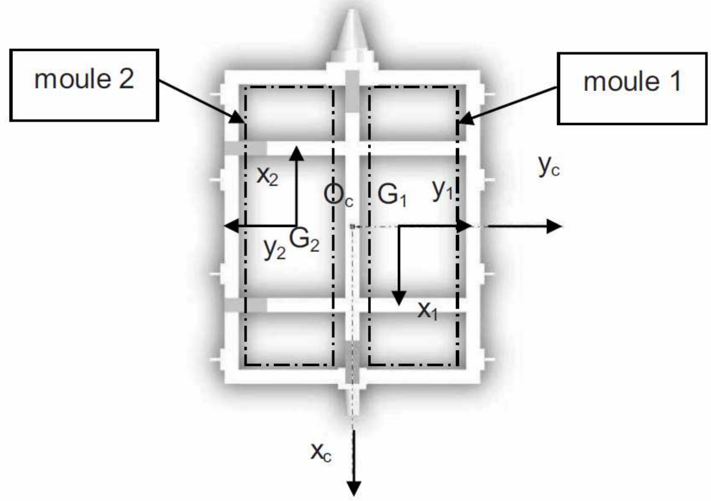


La matrice d'inertie du cadre au point O_C, milieu du cadre se trouve sur l'axe de rotation $O_C, \overrightarrow{x_c}$ de celui ci avec le plateau, dans la base $b_C = (\overrightarrow{x_c}, \overrightarrow{y_c}, \overrightarrow{z_c})$ est la suivante

$$\left[I_{(O_C,Cadre)}\right] = \begin{bmatrix} A_C & -F_C & -E_C \\ -F_C & B_C & -D_C \\ -E_C & -D_C & C_C \end{bmatrix}_{bc}$$

1-1 Indiquer quels sont les termes nuls de cette matrice et préciser pourquoi.

Le cadre est équipé de deux moules identiques respectivement 1 et 2 montés en opposition (voir bases associées).
Les matrices d'inertie des moules 1 et 2, au point O_C dans leurs bases respectives $b_1 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ et $b_2 = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ sont identiques :



$$\left[I_{(O_C,Moule1)}\right] = \begin{bmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{bmatrix}_{b1}$$

$$\left[I_{(O_C,Moule2)}\right] = \begin{bmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{bmatrix}_{b2}$$

1-2 Déterminer littéralement la matrice d'inertie du cadre équipé des deux moules au point O_c dans la base $b_C = (\overrightarrow{x_c}, \overrightarrow{y_c}, \overrightarrow{z_c})$ en fonction des termes des matrices précédentes :

$$\left[I_{(O_C,Cadre+Moule)}\right] = \begin{bmatrix} A_{cm} & -F_{cm} & -E_{cm} \\ -F_{cm} & B_{cm} & -D_{cm} \\ -E_{cm} & -D_{cm} & C_{cm} \end{bmatrix}_{bc}$$

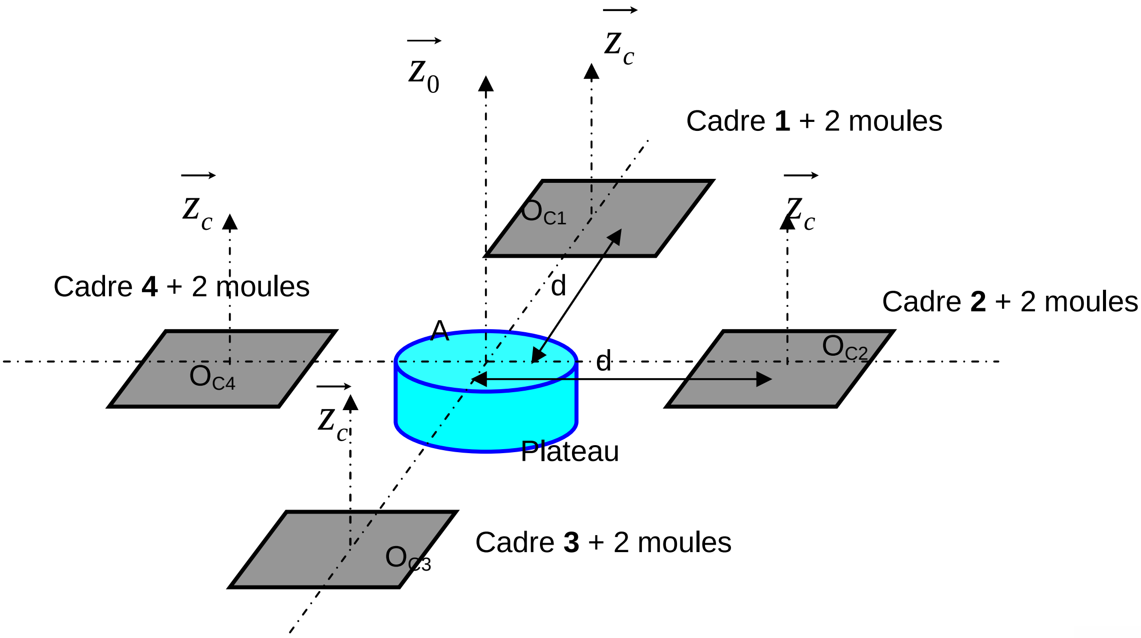
1-3 Application numérique :
$A_c = 159{,}22$ kg.m^2 $B_c = 426{,}02$ kg.m^2 $C_c = 531{,}77$ kg.m^2 $E_c = 0{,}06$ kg.m^2
$A_m = 14{,}38$ kg.m^2 $B_m = 15{,}43$ kg.m^2 $C_m = 21{,}44$ kg.m^2
$D_m = 5{,}32$ kg.m^2 $E_m = 0{,}36$ kg.m^2 $F_m = -0{,}04$ kg.m^2

On donne :
- la masse m_{cm} d'un cadre équipé de deux moules
- Le moment d'inertie C_{cm} d'un cadre équipé de deux moules autour de l'axe (O_C, $\overrightarrow{z_c}$)

- Le centre de gravité d'un cadre équipé de 2 moules est sur l'axe (O_{Ci}, $\overrightarrow{z_c}$) et situé à une distance d par rapport à l'axe de rotation (A, $\overrightarrow{z_0}$) du plateau indexeur ($\overrightarrow{z_0} = \overrightarrow{z_c}$)- Voir la figure ci-dessous
- Le moment d'inertie C_p du plateau indexeur par rapport à l'axe de rotation (A, $\overrightarrow{z_0}$)

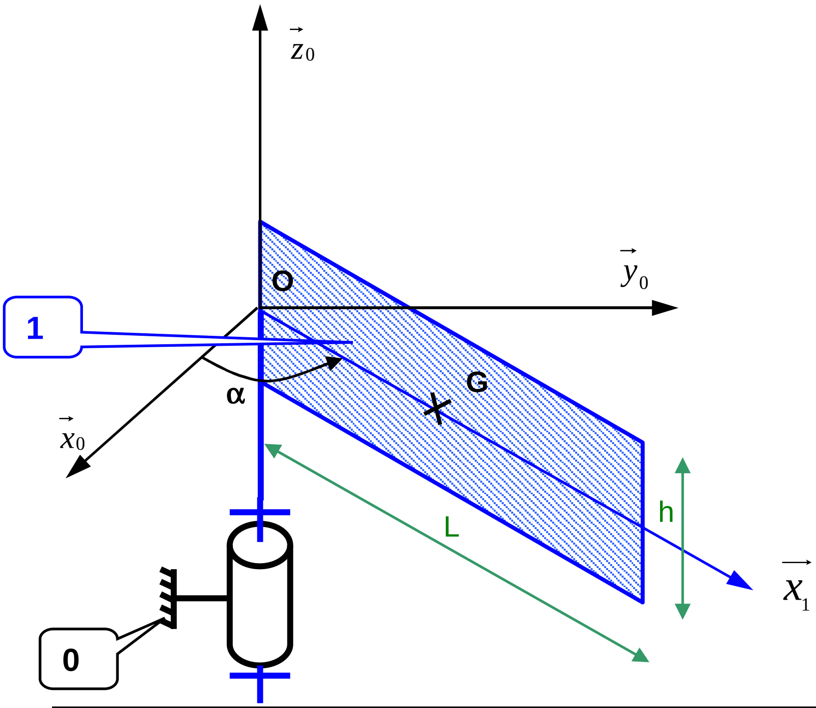
1-4 Déterminer sous forme littérale le moment d'inertie C de l'ensemble tournant plateau indexeur équipé de ses 4 cadres et 8 moules par rapport à l'axe de rotation (A, $\overrightarrow{z_0}$) en fonction des termes précédents

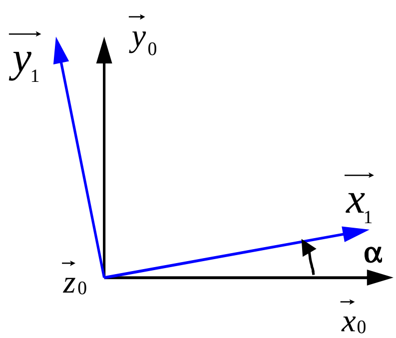
5- Application numérique :
C_{cm} = 575 kg.m^2 ; m_{cm} = 500 kg ; d = 2 ,95 m ; C_p = 1500 kg.m^2



4- PLAQUE EN MOUVEMENT DE ROTATION

On considère une plaque homogène d'épaisseur négligeable (longueur L, hauteur h, masse M, centre de gravité G) en mouvement de rotation par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$.
La plaque est verticale





4-1 Exprimez le torseur cinématique en O puis en G pour la plaque **1**

4-2 Exprimez le torseur cinétique en O puis en G
Le moment cinétique sera calculé de 2 manières:

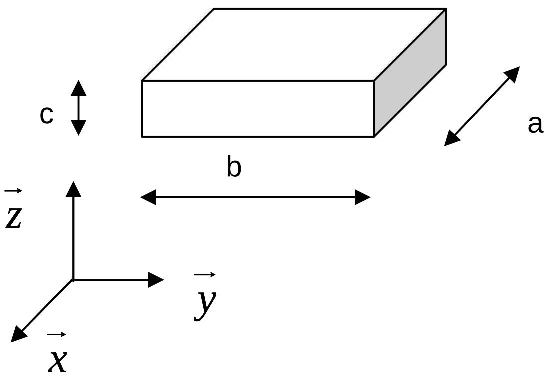
- à partir de l'intégration sur la structure
- puis en utilisant la matrice d'inertie proposée en fin de document

4-3 Exprimez le torseur dynamique en O puis en G

4-4 Calculer l'énergie cinétique de la plaque

Données :
Pour un parallélépipède rectangle, la matrice d'inertie exprimée en son centre de gravité s'écrit :

$$I_{GS/R0} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{G\;R0}$$

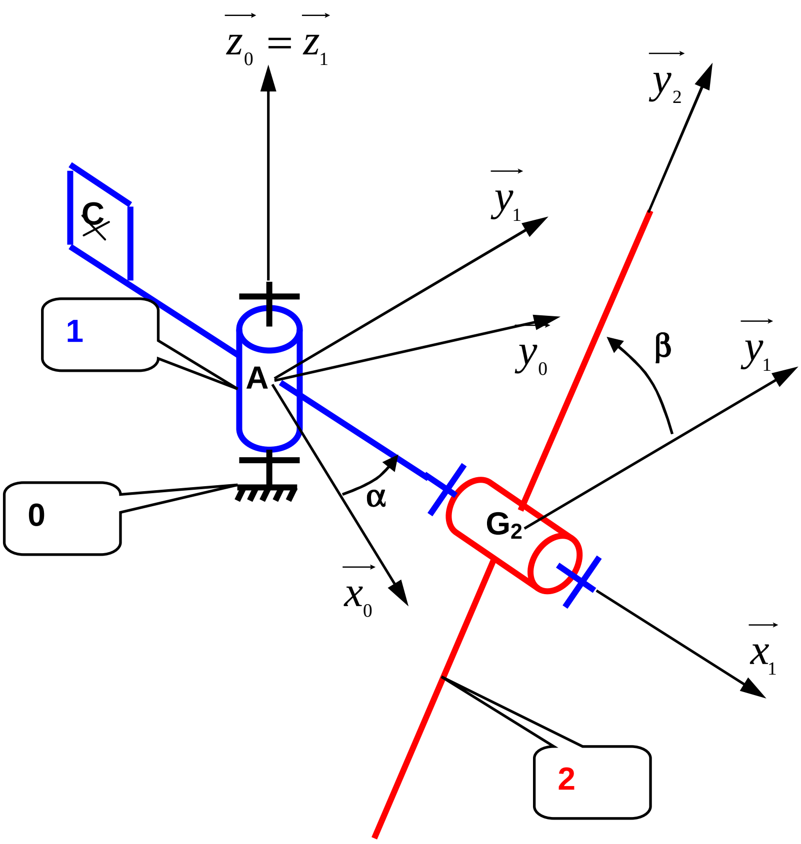


5- Eolienne

On se propose d'étudier une éolienne schématisée ci dessous:

La schématisation simplifiée de l'éolienne comprend : :

- un bâti **0**
- un solide **1** en liaison pivot (A, $\vec{z_0}$) avec le bâti **0**
- un solide **2** (hélice et rotor de génératrice) en liaison pivot (A, $\vec{x_1}$) avec le solide **1**



Paramétrage :
A chaque solide *i* est associé un repère de base orthonormée directe ($\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i}$)

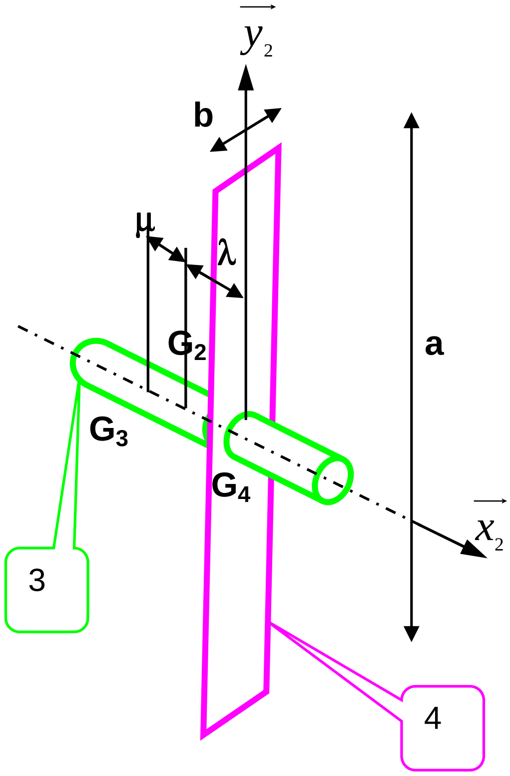
$\vec{z_0} = \vec{z_1}$ ($\vec{x_0}, \vec{x_1}$) = ($\vec{y_0}, \vec{y_1}$) = α

$\vec{x_1} = \vec{x_2}$ ($\vec{y_1}, \vec{y_2}$) = ($\vec{z_1}, \vec{z_2}$) = β

<u>Le solide **1**</u> est homogène, de masse m_1 , centre d'inertie en A, admettant le plan (A, $\vec{x_1}$, $\vec{z_1}$) comme plan de symétrie matérielle.
La matrice d'inertie en A est

$$[I_{(A,1)}] = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(A,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})}$$

Sur le solide **1**, on repère le point C : $\overrightarrow{CA} = h.\vec{x_1} + \Delta.\vec{z_1}$



Le solide **2** est homogène, de masse m_2, de centre d'inertie G_2 ; on pose $\overrightarrow{AG_2} = L.\overrightarrow{x_1}$

Ce solide est constitué :

- d'un cylindre plein 3 d'axe $(A, \overrightarrow{x_2})$ de masse m_3 , de centre d'inertie G_3 ($\overrightarrow{G_3G_2} = \mu.\overrightarrow{x_2}$) de hauteur H et de rayon R
- d'une plaque rectangulaire 4 de masse m_4 , de centre d'inertie G_4 ($\overrightarrow{G_2G_4} = \lambda.\overrightarrow{x_2}$), de coté *a* suivant $(G_4, \overrightarrow{y_2})$, de coté *b* suivant $(G_4, \overrightarrow{z_2})$, et d'épaisseur négligeable.
- On a $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $m_2 = m_3 + m_4$

5-1 : simplifier la matrice d'inertie $[\mathrm{I}_{(A,\ 1)}]$ sachant que l'on a un plan de symétrie matériel

5-2 : Déterminer la relation entre μ et λ

5-3 : Déterminer la matrice d'inertie en G_3 du solide 3 dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$: $[\mathrm{I}(G_3,3)]$ en fonction de la masse m_3 et des dimensions R et H

5-4 : Déterminer la matrice d'inertie en G_4 du solide 4 dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$: $[\mathrm{I}(G_4,4)]$ en fonction de la masse m_4 et des dimensions a et b

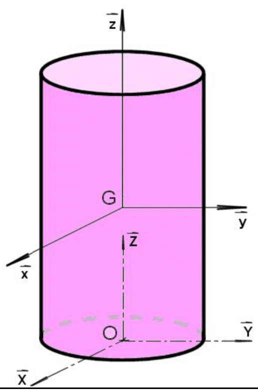
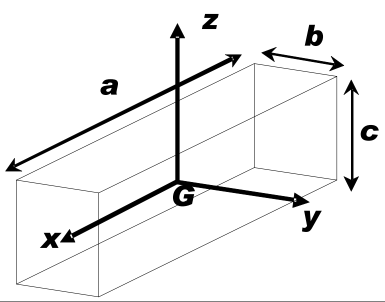
5-5 : Déterminer la matrice d'inertie en G_2 du solide 2 dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$: $[\mathrm{I}(G_2,2)]$

On notera A_2, B_2, C_2, …les termes de la matrice d'inertie $[\mathrm{I}(G_2,2)]$ dans la suite du problème

5-6 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{(A,1/0)}}$ du solide **1** dans son mouvement par rapport au bâti

5-7 Déterminer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{(G_2,2/0)}}$ du solide **2** dans son mouvement par rapport au bâti

Rappels :matrices d'inertie d'un cylindre circulaire et d'un parallélépipède en leurs centres de masse.

	$\overline{\overline{I_G}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}.(3.R^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}.(3.R^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2}.R^2 \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
	$\overline{\overline{I_G}} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}.(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}.(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}.(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$