Sujet e3a-CCINP Durée : 4h. Toute affirmation doit être justifiée.

Les calculatrices sont **interdites**. **Tout résultat doit être encadré voire souligné**

Exercice 1 *Etude d'un endomorphisme*

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!], P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, \dots, (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.
2. Soit P un polynôme de E_n.
   Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.
3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
   Déterminer le quotient et le reste de la division cuclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

* * * * * * * * * * * * * * * *

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right) P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T\left(P_k\right)$.
5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.
6. Écrire la matrice M de T dans la base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E_n.
7. On suppose que λ est une valeur réelle et P un polynôme unitaire tels que :

$$T(P) = \lambda P \quad (1)$$

   (a) Montrer que P est de degré n.
   (b) Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.
   (c) En déduire une expression factorisée de P.
8. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $Q_k = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$.
   (a) Vérifier que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ le polynôme Q_k est un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ_k que l'on explicitera.
   (b) La famille $\mathcal{C} = (Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est-elle une base de E_n ? Si oui, écrire la matrice N de T dans cette base.
   (c) Donner le spectre de T. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 2 *Séries de fonctions*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$$

9. (a) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   On note $U = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions u_n .

   (b) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

   La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

   (c) Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

    (b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

    Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

    (c) On note $V = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

    Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

11. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ définie par :
    pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p_0(x) = x$$

    pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p_n(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

    Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.
    Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée :

$$p(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Exercice 3 *Analyse*

12. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

    On pose, lorsque cette intégrale existe, $\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^{\frac{1}{n}}}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t$.

    (a) Soit α un réel strictement positif.

    i. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \longmapsto (1+h)^{\alpha}$.

    ii. En déduire un équivalent, au voisinage de 1, de $t \longmapsto 1 - t^{\alpha}$.

    (b) Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

    Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\beta}}\mathrm{d}t$ converge.

    (c) Justifier l'existence de γ_n pour tout $n \geq 2$.

13. **Démonstration d'un encadrement**

    (a) Démontrer que l'on a :

    i. pour tout réel t : $1 + t \leq e^t$,

    ii. pour tout réel t négatif : $e^t \leq 1 = t + \dfrac{t^2}{2}$.

    (b) On pose pour tout entier naturel m et pour tout réel u : $U_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{u^k}{k!}$.

    Soit p un entier naturel non nul.
    On suppose que : $\forall u \leq 0,\ U_{2p-1} \leq e^u \leq U_{2p}$.

    i. Démontrer que : $\forall u \leq 0,\ U_{2p+1} \leq e^u$.

    ii. Démontrer également que : $\forall u \leq 0,\ e^u \leq U_{2p+2}$.

    (c) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de e lorsque u est un réel négatif ou nul.

14. Démontrer que l'on an, pour tout $t \in]0,1[$, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $p \geq 1$:

$$1 - \sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k \leq 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right) \leq 1 - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{n}\ln(t)\right)^k.$$

15. Prouver que, pour tout entier naturel p non nul et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t$ existe.

    On rappelle que $\ln(t)$ *est équivalent à* $t-1$ *au voisinage de* 1.

16. Démontrer que l'on an pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2n^2}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t \leq \gamma_n \leq \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t.$$

17. Soit p un entier naturel non nul. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{(1-t)^{1+\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t\right)$.

    Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

18. Prouver alors que $\lim\limits_{n} n\gamma_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$.

19. Prouver que, pour tout entier naturel p, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)t^p\mathrm{d}t$ existe.

20. Démontrer que l'on a pour tout entier naturel p : $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)t^p\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}$.

21. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^2}$.

22. Prouver enfin que : $\gamma_n \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{6n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

    On admettra que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.