

Sujet Maths PC -CC-INP, durée 3h

samedi 08 février

PROBLÈME 1

Ce problème comporte 3 parties indépendantes.

Notations et définitions

- \mathbf{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, \mathbf{N}^* désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- \mathbf{R} désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne le \mathbf{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X]$ le \mathbf{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n .
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $[[n_1, n_2]]$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2 .

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre qui traite des solutions polynomiales de cette équation lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et b est la fonction carré.

Partie I - Endomorphismes

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \Delta(P) = XP'.$$

Calculer $\Delta(X^k)$ pour tout $k \in [[0; n]]$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $X^2P'' = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbf{R}[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par Δ .

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \Phi(P) = X^2P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Q6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q7. Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n .

Exprimer φ_n en fonction de Δ_n .

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$s^2 + (a - 1)s + b = 0. \quad (1)$$

Q10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $\llbracket 0; n \rrbracket$.

Q11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Q12. Déterminer le noyau de φ . En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Partie II - Une équation différentielle

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad (2)$$

où a et b sont des constantes réelles.

Q13. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

Q14. Montrer que si y est une solution de (2) sur I , alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur \mathbf{R} de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$u'' + (a - 1)u' + bu = 0. \quad (3)$$

Q15. Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (3) sur \mathbf{R} . Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I .

Q16. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I .

On suppose dans les deux questions suivantes *uniquement* que $a = 1$ et $b = -4$.

Q17. Montrer que si y est solution de (2) sur J , alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur \mathbf{R} .

Q18. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R} .

Partie III - Une équation de Bessel

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0. \quad (4)$$

Q19. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $] -R, R[$.

Q20. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}. \end{cases}$$

Q21. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$.

Q22. Soient $r > 0$ et f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k \geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

Q23. Montrer que si $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 & = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} & = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q24. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$: $|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}$.

Q25. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Q26. Que peut-on dire du rayon de convergence $R_\beta > 0$ de la série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q27. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.

Montrer que la fonction $y: x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q28. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q29. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.