classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Préparation en Mathématiques pour la rentrée 2024

Pour toute question, vous pouvez me la poser par mail à d.zarouf@cpge-brizeux.fr

1 Révisions

Nous débuterons l'année par un chapitre d'algèbre linéaire puis très vite nous enchaînerons par des compléments sur les séries numériques. Aussi,nous utiliserons sans arrêt à travers nos chapitres de PSI, les complexes, les polynômes, les fonctions usuelles , la trigonométie : C'est pourquoi, je vous demande de revoir sérieusement les chapitres suivants :

1. Les complexes dont il faut impérativement connaître :
   (a) Forme algébrique, forme trigonométrique, module, conjugué, la relation entre module et conjugué.
   (b) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie : définition de e^{it}. Formule d'Euler, Technique de l'angle moitié, factorisation de $1 \pm e^{it}$, $e^{ip} \pm e^{iq}$, Formule de Moivre.
   (c) Racines n-ièmes.
   (d) Exponentielle complexe.
   (e) Interprétation géométrique des complexes.
2. Les fonctions usuelles : définitions et leurs études.
3. Les polynômes dont il faut impérativement connaître :
   (a) Tout le vocabulaire propre aux polynômes : coefficients, décomposition canonique, degré, coefficient dominant, espaces $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$.
   (b) Divisibilité et Théorème de la division euclidienne.
   (c) Fonctions polynômiales et racines : définition d'une racine , ordre de multiplicité, caractérisation à l'aide des polynômes dérivés, polynôme scindé, relation entre coefficients et racines (somme et produit des racines).
   (d) Polynômes irréductibles.
4. L'algèbre linéaire :
   (a) Calcul matriciel : savoir faire les différentes opérations sur les matrices, montrer qu'une matrice est inversible, déterminer l'inverse.
   (b) Espaces vectoriels :connaître les espaces vectoriels de référence, montrer qu'un ensemble est un sous espace vectoriel, le mettre sous forme de $\text{vect}((x_i)_{i\in I})$.
   (c) Espaces de dimension finie : notion de bases et de dimension finie, connaître les différentes méthodes pour obtenir une base, sous espaces supplémentaires, base adaptée à un sev, à une décomposition en somme directe de deux sev.
   (d) Applications linéaires :
      i. méthode pour montrer qu'une application est linéaire, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme.
      ii. Image directe, image réciproque, image, noyau.
      iii. $\dim \mathscr{L}(E, F)$.
      iv. Projecteur et symétrie.
      v. Théorème du rang.
      vi. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie.
   (e) Matrices et applications linéaires :
      i. Savoir construire la matrice d'une application linéaire et savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, déduction du noyau, rang, de l'image.
      ii. Changement de bases : effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire, effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme, matrices semblables.

(f) Déterminants :

i. définition, cas particulier en dimension 2 et 3.

ii. Caractérisation d'une base.

iii. Déterminant d'un endomorphisme et d'une matrice carrée : déterminant d'un produit de matrices, du produit λA où $\lambda \in \mathbb{K}$, de la transposée, caractérisation d'une matrice inversible.

iv. Calcul d'un déterminant par développement par rapport à une colonne ou une ligne, bien maîtriser la linéarité par rapport à chaque variable.

Je vous demande de réviser aussi en utilisant les cartes Anki sur les polynômes, l'algèbre linéaire, puis les séries numériques via **http ://mathem-all.fr/bw/anki.html** . A partir du 10 Août, faites en 20 par jour. Il y aura une interrogation de cours sur ces notions le 3 Septembre.

2 Différents formulaires pour simplifier les calculs

Le formulaire joint donne toutes les formules à connaître absolument : dérivées, primitives, développements limités, formules trigonométriques.... A Lire, relire, apprendre, ré-apprendre jusqu'à ce que ces formules soient acquises comme les tables d'addition et de multiplication que vous connaissez depuis la primaire. Associez ce formulaire au cahier de calculs que vous avez eu en début de Sup.
Lors de l' interrogation écrite du 3 Septembre 2023 , vous aurez à restituer certains points concernant les 6 premiers paragraphes de ce poly.

3 Devoir Libre Obligatoire n°1 à rendre le Lundi 2 Septembre 2023

Une fois vos cours précédents revus, vous pourrez traiter le devoir suivant. A vous d'aller chercher dans vos cours, TD, Devoirs déjà faits les méthodes et idées pour avancer dans la résolution de ces exercices.
Vous faites ce que vous pouvez ! mais faites !!!! **Il est inacceptable de ne rien faire ou presque. Il me faut minimum une copie double remplie**. Il faut toujours au moins passer 10h sur ces sujets et pour un devoir libre, on y passe deux heures puis on y revient le lendemain avec de nouvelles idées car cela a cogité la nuit pendant le sommeil ! ou on se rappelle de quelque chose qu'on va vérifier dans son cours ou TD.... Ce sont des méthodes de travail à adopter. Il ne faut pas attendre que cela tombe tout cuit dans le bec !
Je vous conseille de bien remarquer le lien entre les questions pour une même partie.

Problème I

Il s'agit d'exercices calculatoires indépendants .

3.0.1 Sur les complexes

1. Soit $\rho \in \mathbb{R}_*^+$, $\theta \in]-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = \rho e^{i\theta}$.
2. Quelle est la forme trigonométrique de $\dfrac{1-i}{1+i}$?
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$,
$$\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = \frac{1-i}{1+i}$$
4. Montrer que les solutions de l'équation précédente sont toutes réelles.

3.0.2 Sur les polynômes

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Donner la définition de a racine de P d'ordre de multiplicité m.
   (b) Donner deux méthodes vues dans votre cours montrant que a est racine de P d'ordre de multiplicité m.
2. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]/\{0\}$. Donner la définition de la division euclidienne de A par B.
3. Quel est le reste de la division euclidienne de $(X\cos a + \cos a)^n$ par $(X-1)^2$.
4. Soit $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Montrer que P est divisible par $(X-1)^3$.
5. Montrer que $(P, Q) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

6. Soit $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.
   (a) Rappeler la définition de j en mathématiques. *Attention à ne pas confondre avec la notation physique !!!!*
   (b) Montrer que j est racine de P et donner son ordre de multiplicité.
   (c) Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

3.0.3 Sur les symboles $\sum$ et Π

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} k^p$.
   (a) A l'aide du changement d'indice $i = n - k$ dans $S_{n,1}$, déterminer une équation d'inconnue $S_{n,1}$ puis en déduire la valeur de $S_{n,1}$.
   (b) Faire de même pour $S_{n,2}$. On obtiendra une équation faisant intervenir $S_{n,1}$.
   (c) Faire de même pour $S_{n,3}$.
   (d) Calculer $P_n = 2 + 4 + 6 + \cdots + (2n)$ et $I_n = 1 + 3 + \cdots + (2n+1)$.
2. Simplifier $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k \binom{n}{k}$.
3. Soit $(n, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$.Simplifier les produits suivants :

$$(a) \prod_{k=0}^{n} k \quad (b) \prod_{k=1}^{n} k \quad (c) \prod_{i=1}^{n} k \quad (d) \prod_{k=1}^{n} k^n \quad (e) \prod_{k=1}^{n} n^k \quad (f) \prod_{k=0}^{n} a^k \quad (g) \prod_{k=0}^{n} a^{2^k}$$

   Indication : si besoin écrire ces sommes et produits en utilisant $\cdots$

3.0.4 Sur les séries numériques

1. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.
2. Convergence et somme de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{1+2+...+n}$.
3. Convergence et somme de $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
4. Déterminer des réels a, b et c tels que la série $\sum_{n \geqslant 1} (a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1})$ converge. Calculer alors sa somme.
   On pourra utiliser des développements limités.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x} \,\mathrm{d}\,x$.
   (a) En utilisant le théorème de comparaison sur les SATP, montrer que la série de terme général u_n converge.
   (b) Simplifier $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3.0.5 Calcul de déterminant

En utilisant principalement les propriétés sur les déterminants utilisant opérations sur lignes ou colonnes puis développement par rapport à une colonne ou ligne :

1. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$$

2. Sans calculer le déterminant, montrer qu'il est multiple de 13

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 15 & 5 & 4 \\ 3 & 13 & 19 & 4 \\ 20 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(\lambda)$ la matrice
$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer le déterminant de $A(\lambda)$.
   (b) Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice $A(\lambda)$.
   (c) Déterminer en fonction de λ, une base du noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à $A(\lambda)$, qu'on notera encore $\ker A(\lambda)$.
   (d) A-t-on $\mathrm{Im}A(\lambda) \oplus \ker A(\lambda) = \mathbb{R}^3$?

Problème 2 : Matrices et Endomorphismes Nilpotents

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie n.
Pour f un endomorphisme de E. On pose $f^0 = id_E$ et pour $k \in N$, $f^{k+1} = f \circ f^k$. On dit que l'endomorphisme f est nilpotent s'il existe un entier naturel $s \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $f^s = 0$ et l'entier p qui vérifie $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de f. On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe un entier naturel $s \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^s = 0$ et l' entier p qui vérifie $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de A.

Partie 1 : Étude de quelques exemples

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Montrer que M est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.
2. Soit D l'application définie par $\forall P \in \mathbb{K}_3[X], D(P) = P'$.
   Soit pour tout $k \in [\![0,3]\!], P_k = \frac{X^k}{k!}$.
   (a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$
   (b) Montrer que D est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.
   (c) Justifier pourquoi la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.
   (d) Écrire la matrice de D dans cette base.
   (e) Déterminer $\ker D, \mathrm{rg}\, D$ et $\mathrm{Im}D$.
   (f) Justifier que $\mathrm{Im}D$ est un hyperplan de $\mathbb{K}_3[X]$ et en déterminer une équation et un supplémentaire dans $\mathbb{K}_3[X]$.
3. Soit l'endomorphisme
$$D: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$
   On pose $P_0 = 1$ et pour $k \in [\![1,n]\!], P_k = \frac{X(X+1)\cdots(X+k-1)}{k!}$.
   (a) Calculer $D(P_0)$.
   (b) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ déterminer le degré de P_k et son coefficient dominant.
   (c) Justifier pourquoi la famille $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   (d) Montrer que pour $k \in [\![1,n]\!], D(P_k) = P_{k-1}(X+1)$.
   (e) En déduire que pour $k \in [\![1,n]\!]$ et pour $j \in [\![1,k]\!], D^j(P_k) = P_{k-j}(X+j)$.
   (f) Montrer que D est nilpotent d'indice $n+1$.
   (g) Justifier pourquoi la famille $(P_n, D(P_n), ..., D^n(P_n))$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   (h) Écrire la matrice de D dans la base $(P_n, D(P_n), ..., D^n(P_n))$.
   (i) Déterminer $\mathrm{tr}\,(D)$ et $\det(D)$.

Partie II : Étude dans le cas général

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent non nul d'indice de nilpotence p .

1. Justifier l'existence de p.
   on pourra considérer l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, f^k = 0\}$ et une propriété de $\mathbb{N}$ vue en PCSI.
2. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   (a) Montrer que $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre.
   (b) En déduire que $p \leqslant n$.
   (c) En déduire que f est nilpotent si et seulement si $f^n = 0$.
3. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $M = Mat_{\mathscr{B}} f$. Montrer que M est nilpotente de même indice de nilpotence que f.
4. En déduire que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotent si et seulement si $A^n = 0$.
5. Soient A et B deux matrice semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que pour tout entier k les matrices A^k et B^k sont semblables .
   (b) Montrer que si A nilpotent d'indice p alors B est aussi nilpotent d'indice p .
6. Dans cette question on suppose que $p = n = \dim E$. Soit e un vecteur de E tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.
   (a) Montrer que la famille $(f^{n-1}(e), f^{n-2}(e), ..., f(e), e)$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice de f relativement cette base.
   (c) Déterminer $\operatorname{rg}(f)$.
7. Dans cette question on se propose de montrer que si $\operatorname{rg}(f) = n - 1$, alors l'indice de nilpotence de f est $p = n$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul k, on a : $\operatorname{Im}(f^{k+1}) = \operatorname{Im}(f_{|\operatorname{Im}(f^k)})$ où $f_{|\operatorname{Im}(f^k)}$ désigne l'endomorphisme défini par $\forall y \in \operatorname{Im}(f^k), f_{|\operatorname{Im}(f^k)}(y) = f(y)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \operatorname{rg}(f^k) = rg(f^{k+1}) + \dim(Im(f^k) \cap \ker(f))$.
   (c) Déduire alors $p = n$. (Remarquer que $\dim(ker(f)) = 1$)