Électromagnétisme 1
Champ électrique en régime stationnaire

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges pour en déduire des propriétés des champs électrique.
- ❑ Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday en régime variable et en régime stationnaire.
- ❑ Relier l'existence du potentiel scalaire électrique au caractère irrotationnel du champ électrique.
- ❑ Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrique.
- ❑ Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme du champ électrique en dehors des sources.
- ❑ Représenter les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentielles et inversement.
- ❑ Évaluer la valeur d'un champ électrique à partir d'un réseau de surfaces équipotentielles.
- ❑ Établir l'équation de Poisson reliant le potentiel à la densité volumique de charge.
- ❑ Énoncer et appliquer le théorème de Gauss.
- ❑ Établir le champ électrique et le potentiel créés par une charge ponctuelle, une distribution de charge à symétrie sphérique, une distribution de charge à symétrie cylindrique.
- ❑ Exploiter le théorème de superposition.
- ❑ Utiliser le modèle de la distribution surfacique de charge.
- ❑ Établir le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
- ❑ Établir la relation entre l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle et le potentiel.
- ❑ Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à une particule chargée dans un champ électrique.
- ❑ Établir les analogies entre les champs électrique et gravitationnel.
- ❑ Décrire qualitativement le phénomène d'influence électrostatique.
- ❑ Déterminer l'expression du champ d'un condensateur plan en négligeant les effets de bord.
- ❑ Déterminer l'expression de la capacité.
- ❑ Prendre en compte la permittivité du milieu dans l'expression de la capacité.
- ❑ Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.
- ❑ Citer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique.

Résumé du cours

1 Notion de charge électrique

La charge est une grandeur extensive. Au niveau microscopique, la charge est portée par des porteurs de charge. Un porteur de charge a une charge quantifiée : $q = ke$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. e s'appelle la charge élémentaire. Un électron porte une charge $q_{e^-} = -e$.

1.1 Description de la charge

La répartition peut être modélisée de plusieurs manières.

1.1.1 Distribution volumique

$\rho(M,t)$ désigne la densité volumique de charge au point M et à l'instant t.

Charge d'un système en description volumque

$$Q = \iiint \rho dV$$

Avec

- Q la charge (en C)
- ρ la densité volumique de charge (en $\mathrm{C \cdot m^{-3}}$)

1.1.2 Distribution surfacique

$\sigma(M,t)$ désigne la densité surfacique de charge au point M et à l'instant t.

Charge d'un système en description surfacique

$$Q = \iint \sigma dS$$

Avec

- Q la charge (en C)
- σ la densité surfacique de charge (en $\mathrm{C \cdot m^{-2}}$)

1.1.3 Distribution linéique

$\lambda(M,t)$ désigne la densité linéique de charge au point M et à l'instant t.

Charge d'un système en description linéique

$$Q = \int \lambda dl$$

Avec

- Q la charge (en C)
- λ la densité linéique de charge (en $\mathrm{C \cdot m^{-1}}$)

1.1.4 Distribution ponctuelle

Q désigne la charge d'un objet ponctuel.

1.2 Charge électrique et force

Force d'interaction électrostatique

Hypothèses Les deux particules sont ponctuelles.

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(M_1 M_2)^2} \vec{e}$$

Avec

- $\vec{F}_{1/2}$ la force exercée par la particule 1 sur la particule 2 (en N)
- q_1 la charge de la particule 1 (en C)
- q_2 la charge de la particule 2 (en C)
- $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide
- M_1 le point où se trouve la particule 1
- M_2 le point où se trouve la particule 2
- $\vec{e} = \frac{\vec{M_1 M_2}}{\|M_1 M_2\|}$ le vecteur unitaire de 1 vers 2

La force d'interaction électrostatique est répulsive si les charges sont de même signe. La force d'interaction électrostatique est attractive si les charges sont de signes différents.

Champ électrique créé par une particule ponctuelle [1]

Hypothèses La particule est à l'origine du repère.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e_r}$$

Avec

- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$)
- q la charge (en C)
- $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide
- r la première coordonnée sphérique (en m)

2 Champ et potentiel électriques

2.1 Équations de Maxwell

Le champ électrique obéit aux équations de Maxwell.

Équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Avec

- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$)
- ρ la densité volumique de charge (en $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}$)
- $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide

Équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec

- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)
- $\vec{B}$ le champ magnétique (en T)

2.2 Potentiel électrique

En régime stationnaire, le potentiel électrique peut s'écrire comme un gradient.

Potentiel électrique [2]

Hypothèses En régime stationnaire

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$$

Avec

- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)
- V le potentiel électrique (en V)

Cette équation définit le potentiel électrique.

Comme $\overrightarrow{\text{grad}}K = \vec{0}$, le potentiel électrique est défini à une constante près. On choisit arbitrairement la valeur du potentiel électrique en un point.

Circulation de $\vec{E}$ [3]

Hypothèses En régime stationnaire

$$\int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = V_A - V_B$$

Avec

- A et B deux points de l'espace
- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)
- V_A le potentiel électrique au point A (en V)
- V_B le potentiel électrique au point B (en V)

2.3 Équation de Poisson

Équation de Poisson [4]

Hypothèses En régime stationnaire

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Avec

- Δ le laplacien scalaire
- V le potentiel électrique (en V)
- ρ la densité volumique de charge (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$)
- $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide

Équation de Laplace [5]

Hypothèses

- en régime stationnaire
- dans les zones vides de charges

$$\Delta V = 0$$

Avec

- Δ le laplacien scalaire
- V le potentiel électrique (en V)

2.4 Topographie des cartes de champ

2.4.1 Tubes de champ en absence de sources

Conservativité du flux de $\vec{E}$ [6]

Hypothèses

- en régime stationnaire
- dans les zones vides de charges

Le flux de $\vec{E}$ est le même sur chaque section d'un tube de champ.

Avec $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)

Schéma

Un rétrécissement d'un tube de champ s'accompagne donc d'une augmentation de la norme du champ électrique.

2.4.2 De l'un à l'autre

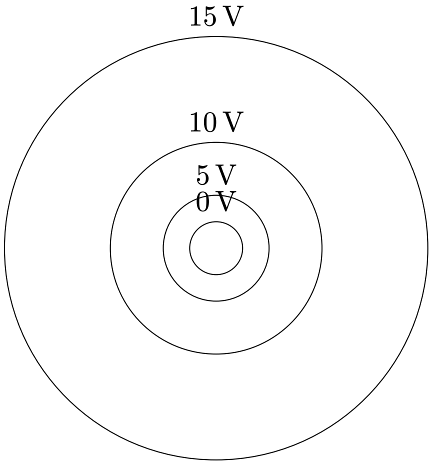
Lien entre cartes de champ électrique et de potentiel électrique

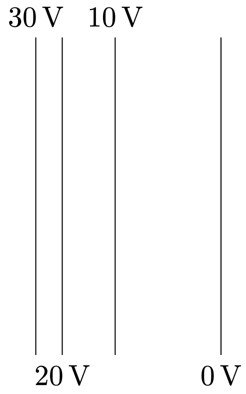
Hypothèses En régime stationnaire

- Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles
- $\vec{E}$ pointe dans le sens où V diminue le plus vite
- plus $\|\vec{E}\|$ est grand, plus les équipotentielles sont resserrées

Application 7

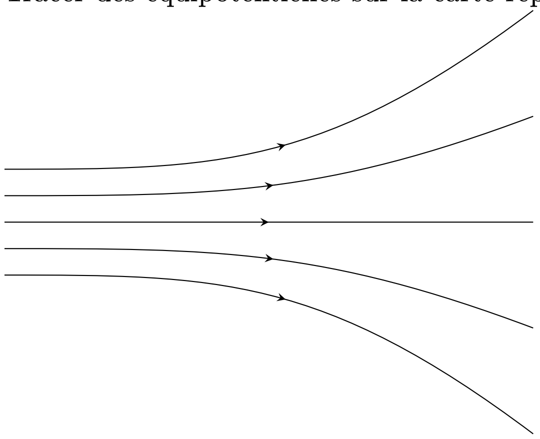
Tracer des lignes de champ électrique sur les cartes représentant des équipententielles.





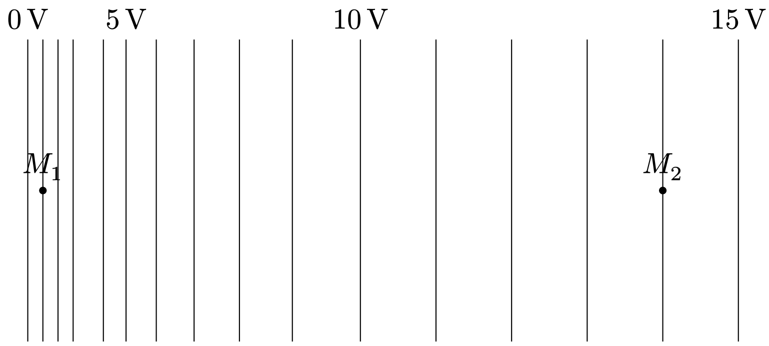
Application 8

Tracer des équipotentielles sur la carte représentant des lignes de champ.



Application 9

Déterminer la valeur, la direction et le sens du champ électrique aux points M_1 et M_2 en utilisant la carte des équipotentielles.



2.5 Linéarité

Les équations de Maxwell sont linéaires, il est donc possible d'utiliser le théorème de superposition.

Théorème de superposition

Si les distributions de charge ρ_1 et ρ_2 créent respectivement les champ électrique $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$, alors la distribution $\rho_1 + \rho_2$ crée le champ $\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$.

3 Théorème de Gauss

3.1 Symétries du champ électrique

L'existence de symétries dans la distribution de charge contraint le champ électrique associé.

Principe de Curie

Lorsque des causes produisent des effets, les symétries de causes doivent se retrouver dans leurs effets.

Plans de symétries et champ électrique [10]

Le champ électrique est inclus dans les plans de symétrie de la distribution de charge.

Application [11]

On considère une boule uniformément chargée. Déterminer la direction du champ électrique en tout point de l'espace.

Si, pour chaque couple de points symétriques l'un de l'autre par un plan, la distribution de charge est opposée en ces points, le plan est appelé plan d'antisymétrie.

Plans d'antisymétries et champ électrique [12]

Le champ électrique est orthogonal aux plans d'antisymétrie de la distribution de charge.

Application [13]

On considère deux armatures planes se faisant face, de charges opposées. Déterminer la direction du champ électrique dans le plan médiateur des armatures.

Schéma

3.2 Invariances du champ électrique

Un champ est invariant par une transformation si cette transformation laisse ce champ inchangé.
L'existence d'invariances dans la distribution de charge contraint le champ électrique associé.

Principe de Curie

Lorsque des causes produisent des effets, les invariances de causes doivent se retrouver dans leurs effets.

Application [14]

De quelles variables d'espace dépend le champ électrique dans les situations suivantes.

1. boule uniformément chargée de densité volumique de charge ρ
2. plan infini uniformément charge de densité surfacique de charge σ
3. fil infini infiniment fin uniformément chargé de densité linéique de charge λ

3.3 Théorème de Gauss

Théorème de Gauss [15]

Hypothèses En régime stationnaire

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Avec

- S une surface fermée orientée vers l'extérieur
- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- Q_{int} la charge électrique contenue à l'intérieure de S (en C)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)

Application [16]

Déterminer le champ électrique créé par une particule ponctuelle de charg q.

Application [17]

Déterminer le champ électrique créé par une boule de rayon R uniformément chargée de densité volumique de charge ρ.

Application [18]

Déterminer le champ électrique créé par un cylindre (plein) de rayon R, infiniment haut, uniformément chargé de densité volumique de charge ρ.

Application [19]

Déterminer le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé de densité surfacique de charge σ.

3.4 Analogie avec le champ de gravité

Champ électrique et champ gravitationnel sont analogues.

	électrostatique	gravitation
Grandeur portée par une particule	charge q (en C)	masse m (en kg)
Force	$\vec{F}_{1/2} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{1}{(M_1 M_2)^2} \vec{e}$	$\vec{F}_{1/2} = -\mathcal{G} m_1 m_2 \dfrac{1}{(M_1 M_2)^2} \vec{e}$
	$= q_2 \vec{E}(M_2)$	$= m_2 \vec{g}(M_2)$
Champ	$\vec{E}$ $(\mathrm{V \cdot m^{-1}})$	$\vec{g}$ $(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$
	$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-\mathcal{G}$

Théorème de Gauss gravitationnel

20

$$\oiint \vec{g}.\overrightarrow{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}$$

Avec

- S une surface fermée orientée vers l'extérieur
- $\vec{g}$ le champ gravitationnel (en $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$)
- M_{int} la masse contenue à l'intérieure de S (en kg)
- $\mathcal{G} = 6{,}6 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ la constante gravitationnelle[a] (en $\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$)

[a] aussi appelée constante universelle de gravitation

Application

21

La Terre a une masse $m_T = 6{,}0 \times 10^{24}$ kg et un rayon de $R = 6{,}3 \times 10^3$ km. Déterminer le champ gravitationnel créé par la Terre dans tout l'espace en supposant sa masse volumique uniforme.

4 Condensateur plan

4.1 Champ électrique

Champ électrique dans un condensateur [22]

Hypothèses

- en régime stationnaire
- les effets de bord sont négligés
- le condensateur est constitué du deux armatures planes en regard
- les armatures sont séparées de vide
- les armatures ont des charges opposées
- les armatures sont uniformément chargées

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{\epsilon_0 S}\vec{n} & \text{entre les armatures} \\ \vec{0} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Avec

SCHÉMA

- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- Q la charge d'une armature (en C)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{n}$ un vecteur unitaire allant d'une armature chargée positivement vers celle chargée négativement

4.2 Capacité

Capacité d'un condensateur plan [23]

Hypothèses

- en régime stationnaire
- les effets de bord sont négligés
- le condensateur est constitué du deux armatures planes identiques en regard
- les armatures sont séparées de vide
- les armatures ont des charges opposées

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Avec

- C la capacité du condensateur (en F)
- S la surface des armatures (en $\mathrm{m^2}$)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)
- e la distance entre les armatures (en m)

4.3 Influence de la permittivité

Lorsque l'espace entre les armatures n'est pas vide mais occupé par un isolant, il faut prendre en compte sa permittivité.

Capacité d'un condensateur plan ✎24

Hypothèses

- en régime stationnaire
- les effets de bord sont négligés
- le condensateur est constitué du deux armatures planes identiques en regard
- les armatures ont des charges opposées

SCHÉMA

$$C = \frac{\epsilon S}{e}$$

Avec

- C la capacité du condensateur (en F)
- S la surface des armatures (en m^2)
- $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ la permittivité diélectrique de l'isolant (en $F \cdot m^{-1}$)
- ϵ_r la permittivité diélectrique relative de l'isolant (sans unité)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $F \cdot m^{-1}$)
- e la distance entre les armatures (en m)

APPLICATION ✎25

Un condensateur céramique de capacité 470 pF comporte un matériau diélectrique (une céramique) de permittivité diélectrique relative 20 et d'épaisseur 1 µm. Déterminer le diamètre des armatures.

4.4 Aspect énergétique

L'énergie stockée dans un condensateur est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2$.

Densité volumique d'énergie électrostatique ♥ ✎26

Hypothèses Dans le vide

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Avec

- w la densité volumique d'énergie électrostatique (en $J \cdot m^{-3}$)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $F \cdot m^{-1}$)
- E le champ électrique (en $V \cdot m^{-1}$)

APPLICATION ✎27

Déterminer l'énergie électrostatique totale dans tout l'espace pour une boule uniformément chargée de densité volumique de charge ρ et de rayon R.

TD

1 Electric field ans potentiel created by a uniformly charged ball

A ball of center is O, which radius is R is uniformly charged and its total charge is Q.
The coordinates of the gradient in spherical coordinates is given :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e_\phi}$$

1. Ascertain the electric field and then the electric potential in every point of space. The electric potential is taken null far away from the ball.

2. Plot $E(r)$ ans $V(r)$ as a function of r.

2 Champ de gravitation

La masse volumique d'une planète de rayon $R = 6400\,\text{km}$ varie avec la distance r au centre selon la loi $\mu(r) = \mu_0\left(1 - a\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$. La masse volumique moyenne de la planète vaut $\frac{m_{\text{planète}}}{V_{\text{planète}}} 5{,}52 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et celle des roches superficielles vaut $\rho(R) = 2{,}67 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

1. Calculer numériquement les valeurs de μ_0 et a.

2. Établir l'expression littérale du champ de gravitation créé par la planète dans tout l'espace.

3. Pour quel rayon le champ de gravitation est-il maximal à l'intérieur de la planète ? L'exprimer numériquement en fonction de R.

3 Dipôle électrostatique

Un dipôle est constitué d'une charge q disposée au point A de coordonnées $(a/2, 0, 0)$ et d'une charge $-q$ disposée au point A' de coordonnées $(-a/2, 0, 0)$. On étudie le champ électrique et le potentiel électrique en un point M.On note d la distance entre A et M et d' la distance entre A' et M. On note r la distance entre M et l'origine du repère.

On donne les coordonnées du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e_\phi}$$

1. Déterminer le potentiel électrique créé par chacune des charges en fonction de d et d', en supposant celui-ci nul à l'infini. En déduire le potentiel électrique créé par le dipôle constitué des deux charges.

2. Dans l'approximation où $r >> a$, montrer que l'expression du champ électrique total s'écrit

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{d}.\vec{e_r}$$

   où on exprimera $\vec{d}$.

3. En déduire l'expression du champ électrique dans la même approximation.

4 Condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué de deux armatures. L'armature intérieure est un cylindre de rayon R_1 et de hauteur h, elle porte la charge Q ; l'armature extérieure est un cylindre de même axe, de rayon R_2, de même hauteur et porte la charge $-Q$. L'espace entre les armatures est vide. On néglige les effets de bord.

1. Que signifie « négliger les effets de bord » ?
2. Établir l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.
3. Établir l'expression de la différence de potentiel entre les deux armatures.
4. En déduire l'expression de la capacité du condensateur cylindrique.