Électromagnétisme 2
Champ magnétique en régime stationnaire

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Énoncer les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson en régime variable et en régime stationnaire.
- ❑ Exploiter la conservation du flux magnétique et ses conséquences sur les lignes de champ magnétique.
- ❑ Énoncer et appliquer le théorème d'Ampère.
- ❑ Établir l'expression du champ magnétique créé par un fil épais et infini, par un solénoïde infini en admettant que le champ extérieur est nul, et par une bobine torique.
- ❑ Exprimer les forces de Laplace s'exerçant sur un conducteur filiforme et sur une distribution volumique de courant.

Résumé du cours

1 Notion de courant électrique

Le courant électrique correspond à un déplacement de porteurs de charge. La répartition des courants peut être modélisée de plusieurs manières.

1.1 Distribution volumique

$\vec{j}(M, t)$ désigne le vecteur densité de courant électrique au point M et à l'instant t.

Courant en description volumique

$$I = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS}$$

Avec

- I le courant électrique en A
- $\vec{j}$ le vecteur densité de courant électrique en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$

1.2 Distribution surfacique

$\vec{j_S}(M, t)$ désigne le vecteur densité surfacique de courant électrique au point M et à l'instant t.

Courant en description surfacique

$$I = \int \vec{j_S}.\overrightarrow{dl}$$

Avec

- I le courant électrique en A
- $\vec{j_S}$ le vecteur densité surfacique de courant électrique en $\mathrm{A \cdot m^{-1}}$

1.3 Distribution linéique

I désigne le courant dans un objet filiforme.

2 Propriétés du champ magnétostatique

2.1 Équations de Maxwell

Le comportement du champ magnétique est régi par les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Ampère.

Équation de Maxwell-Thomson

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Avec

- $\vec{B}$ le champ magnétique (en T)

Équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Avec

- $\vec{B}$ le champ magnétique (en T)
- $\vec{j}$ le vecteur densité de courant électrique (en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$)
- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$ la perméabilité magnétique du vide
- $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ la permittivité diélectrique du vide

2.2 Conservation du flux du champ magnétique

Conservation du flux de $\vec{B}$ [1]

Le champ magnétique est à flux conservatif

Du fait de cette propriété, l'équation de Maxwell-Thomson est parfois appelée équation de Maxwell-flux.
Un évasement d'un tube de champ s'accompagne donc de la diminution de la norme du champ magnétique.

2.3 Forces causées par un champ magnétique

Le champ magnétique exerce une force sur les particules chargées en mouvement. L'expression de la forcée exercée par le champ magnétique dépend de la description du déplacement des charges.

2.3.1 Description ponctuelle

Dans la description ponctuelle, une particule chargée est animée d'une vitesse.

Force magnétique subie par une particule ponctuelle

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Avec

- $\vec{F}$ la partie magnétique de la force de Lorentz subie par la particule (en N)
- q la charge de la particule (en C)
- $\vec{B}$ le champ magnétique (en T)

Application [2]

Une particule chargée de charge q et de masse m plongée dans un champ manétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{e_z}$ a une trajectoire circulaire orthogonale à $\vec{B}$. Exprimer sa vitesse angulaire.

2.3.2 Desctription linéique

Dans la description linéaire, un fil infiniment fin est parcouru par un courant électrique.

Force de Laplace 3

$$\delta\overrightarrow{F} = I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$$

Avec

- $\delta\overrightarrow{F}$ la force magnétique subie par une portion de conducteur (en N)
- I le courant parcourant le conducteur (en A)
- $\overrightarrow{dl}$ la longueur de la portion de conducteur orientée dans le même sens que le courant (en m)
- $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique (en T)

Application 4

Dans les rail de Laplace, une barre traversée par un courant de 5 A roule sur des rails distants de 10 cm en présence d'un champ magnétique vertical de 3×10^{-2} T. Calculer la norme de la force magnétique subie par la barre.

2.3.3 Description volumique

Dans la description volumique, le vecteur densité volumique de courant est présent.

Force de Laplace volumique 5

$$\delta\overrightarrow{F} = \overrightarrow{j}\,dV \wedge \overrightarrow{B}$$

Avec

- $\delta\overrightarrow{F}$ la force magnétique (en N)
- $\overrightarrow{j}$ le vecteur densité de courant électrique (en $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$)
- dV le volume du système (en m^3)
- $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique (en T)

Application 6

Un fil épais de section $6\,\mathrm{mm}^2$ et de longueur 10 m est parcouru par un courant de 5 A. Calculer la force exercée par le champ magnétique terrestre (5×10^{-5} T), supposé orthogonal au courant.

3 Théorème d'Ampère

3.1 Invariances du champ magnétique

Les invariances de la distribution de courant contraignent la forme du champ électrique.

D'après le principe de Curie, les invariances de la distribution de courant sont aussi des invariances du champ magnétique.

3.2 Symétries du champ magnétique

Le champ magnétique est un pseudo vecteur :

- le champ magnétique est symétrique par rapport aux plans d'antisymétrie
- le champ magnétique est antisymétrique par rapport aux plans de symétrie

Plans de symétrie et champ magnétique [7]

Le champ magnétique est orthogonal aux plans de symétrie de la distribution de courant.

Application [8]

Déterminer la direction du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini et infiniment fin.

Plans d'antisymétrie et champ magnétique [9]

Le champ magnétique est inclus dans les plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

3.3 Théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère permet de déterminer le champ magnétique à partir de la distribution de courant.

Théorème d'Ampère [10]

Hypothèses en régime stationnaire

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Avec

- $\mathcal{C}$ une courbe fermée orientée
- $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique (en T)
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide
- $I_{\text{enlacé}}$ le courant enlacé par $\mathcal{C}$ (orienté dans le sens direct) (en A)

Application [11]

Déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace par un fil épais de rayon R et infini parcouru par un vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$.

Application [12]

Déterminer le champ magnétique créé dans tout l'espace par un solénoïde infini de rayon R comportant n spires par unité de longueur parcourru par un courant I. Le solénoïde est assimilé à une succession de spires circulaires. On suppose le champ magnétique nul à l'extérieur du solénoïde.

Application [13]

Déterminer le champ magnétique créé par une bobine torique comportant $N \gg 1$ spires parcourue par un courant I.

TD

1 Orage

Au cours d'un orage, un éclair peut être assimilé à un conduit cylindrique rectiligne de rayon $a = 10\,\mathrm{cm}$ et parcouru par un courant $I = 1 \times 10^5\ \mathrm{A}$ de densité volumique de courant uniforme.

1. Faire un schéma et expliqué pourquoi les électrons de ce courant sont soumis à une force magnétique de Lorentz. Quel est son sens ?

2. Montrer que les charges mobiles d'un élément de volume $d\tau$ de l'éclair subissent une force volumique $\frac{d\vec{f}_m}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ où $\vec{j}$ est le vecteur densité volumique de courant dans l'éclair.

3. Déterminer j et B au niveau du bord du conduit et exprimer la norme de cette force magnétique par unité de volume en fonction de I et a.

4. Faire l'application numérique de cette force et la comparer au poids volumique de l'air. Conclure.

2 Bobine torique

Une bobine est constituée par un fil conducteur bobiné en spires jointives sur un tore circulaire à section carrée de côté a, de rayon moyen R. On désigne par n le nombre total de spires et par I le courant qui les parcourt. On note (Oy) son axe de symétrie.

On s'intéresse au champ magnétique à l'intérieur du tore.

1. Faire un schéma du système.

2. Par une analyse des invariances, déterminer les dépendances de $\vec{B}$.

3. Par une analyse des symétries, déterminer la direction $\vec{B}$.

4. Montrer que le champ magnétique qui règne en un point $M(x, y)$ quelconque du plan xOy à l'intérieur du tore peut s'exprimer sous la forme $B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}$

5. Déterminer le flux Φ du champ magnétique à travers la surface d'**une** spire dont la normale est orientée dans le sens du champ.

3 Câble coaxial

On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1, parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2, de rayon extérieur R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$ et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant du conducteur central.

On notera $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur unitaire de l'axe commun des deux conducteurs. Soit un point M à une distance r de l'axe du câble.

1. Montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé au point M est orthoradial.

2. Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}$.

3. Préciser alors la forme des lignes de champ.

4. Montrer que le champ magnétique créé au point M est nul si $r > R_3$.

5. Calculer les densités de courant $\vec{j_1}$ et $\vec{j_2}$, respectivement dans le conducteur central et du conducteur périphérique en fonction des courants I et $-I$ et des rayons R_1, R_2 et R_3.
6. En appliquant le théorème d'Ampère à un contour $\mathcal{C}$ que l'on précisera, donner l'expression de la composante $B(r)$ du champ magnétique créé au point M en fonction de μ_0, I, r, R_1, R_2, et R_3 dans chacun des cas suivants :
   - $r < R_1$
   - $R_1 < r < R_2$
   - $R_2 < r < R_3$
7. Tracer l'allure du graphe de $B(r)$.