

Électromagnétisme 3

ARQS magnétique

COMPÉTENCES

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- Établir la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.
- Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.
- Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.
- Relier la circulation du champ électrique à la dérivée temporelle du flux magnétique.
- Décrire la géométrie des courants de Foucault dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant.
- Exprimer la puissance dissipée par effet Joule en négligeant le champ propre et expliquer le rôle du feuilletage.
- Exprimer l'énergie magnétique d'une bobine seule ou de deux bobines couplées en fonction des coefficients d'inductance et des intensités.
- Déterminer, à partir de l'expression de l'énergie magnétique, l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique dans le cas d'une bobine modélisée par un solénoïde long.
- Citer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique.
- Établir, dans le cas de deux bobines couplées, l'inégalité $M^2 \leq L_1 L_2$.

RÉSUMÉ DU COURS

1 ARQS magnétique

1.1 Conservation de la charge

Les équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation locale de conservation de la charge.

Équation locale de conservation de la charge



$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Avec

- \vec{j} le vecteur densité de courant électrique (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$)
- ρ la densité volumique de charge (en C)

1.2 Courants de déplacement

Le terme $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ se nomme courant de déplacement. Son unité est $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$.

L'ARQS¹ magnétique consiste à négliger les courants de déplacement.

Équation de Maxwell dans l'ARQS



Hypothèses Dans l'ARQS magnétique

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Avec

- \vec{E} le champ électrique (en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)
- \vec{B} le champ magnétique (en T)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)
- \vec{j} le vecteur densité de courant électrique (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$)
- ρ la densité volumique de charge (en C)

¹approximation des régimes quasi-stationnaire

Avec

$$\frac{l}{\tau} \ll c$$

- l une longueur caractéristique du problème (en m)
- τ une durée caractéristique du problème (en s)
- c la célérité de la lumière dans le vide (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

1.3 Du régime stationnaire au régime variable

Dans l'ARQS magnétique, les équation de Maxwell-Thomson et Maxwell-Ampère sont les mêmes qu'en stationnaire. Tous les résultats vus dans le chapitre « Champ magnétique en régime stationnaire » restent donc valables.

Avec

Hypothèses Dans l'ARQS

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- \mathcal{C} une courbe fermée orientée
- \vec{B} le champ magnétique (en T)
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide
- $I_{\text{enlacé}}$ le courant enlacé par \mathcal{C} (orienté dans le sens direct) (en A)

1.4 Principe de l'ARQS

Dans l'ARQS, les courants créent des champs magnétiques (qu'on peut déterminer avec le théorème d'Ampère) qui induisent à leur tour des champs électriques (qu'on peut déterminer avec la loi de Maxwell-Faraday).

Dans l'ARQS, le champ magnétique induit le champ électrique.

2 Induction

2.1 Circulation du champ électrique

Avec

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

- \vec{E} le champ électrique (en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)
- $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ le flux du champ magnétique (en $\text{T} \cdot \text{m}^2$)
- S une surface s'appuyant sur \mathcal{C} orientée dans le sens direct.

Dans le cas où \mathcal{C} suit un circuit électrique, on obtient la loi de Lenz-Faraday.



Avec

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

- e la force électromotrice (en V)
- ϕ le flux du champ magnétique (en $\text{T} \cdot \text{m}^2$) orienté dans le sens direct par rapport à la force électromotrice.

APPLICATION



Un circuit électrique carré de côté a comportant un condensateur de capacité C et un résistor de résistance R est placé dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ qui lui est orthogonal. Représenter le circuit électrique équivalent.

2.2 Courant de Foucault

Lorsqu'un cylindre conducteur est placé dans un champ magnétique oscillant, des courants y apparaissent. Ces courants sont appelés courants de Foucault.

Courants de Foucault



Hypothèses A l'intérieur du cylindre, dans l'AR-QS

SCHEMA



Avec

- B_0 l'amplitude du champ magnétique (en T)
- r la première coordonnée cylindrique (en m)
- ω la pulsation (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
- t le temps (en s)

$$\vec{E} = \frac{1}{2} B_0 \omega r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

La présence d'un champ électrique dans un milieu conducteur entraîne la production de chaleur par effet Joule².

Densité volumique de puissance

*Hypothèses*

- Dans un conducteur ohmique.
- Dans l'ARQS

Avec

- \mathcal{P}_{vol} la densité volumique de puissance (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$)
- E le champ électrique (en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \gamma E^2$$

²Les détails de cette production de chaleur seront étudiés dans le chapitre « Transport de charge ».

Hypothèses

- Dans un conducteur ohmique.
- Dans l'ARQS

Avec

- γ la conductivité du cylindre (en $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$)
- B_0 l'amplitude du champ magnétique (en T)
- ω la pulsation (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)
- h la hauteur du cylindre (en m)
- a le rayon du cylindre (en m)

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{\pi \gamma B_0^2 \omega^2 h a^4}{16}$$

APPLICATION

Le fond d'assiette en fer ($\gamma_{\text{Fe}} = 1 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$) a un rayon de 15 cm et une épaisseur de 1 cm. La casseroles est posée sur une plaque à induction qui émet un champ magnétique oscillant à la fréquence 20 kHz. Quelle amplitude doit avoir le champ magnétique pour que la puissance apportée à la casseroles soit de 1 kW ?

2.3 Intérêt du feuilletage

Dans les transformateurs et dans les moteurs, des pièces métalliques sont placées dans des champs magnétiques variables et sont donc le siège de courants de Foucault. Ces courants de Foucault représentent des pertes qu'on souhaite limiter.

Pour limiter les pertes par courant de Foucault, on utilise le **feuilletage**. Le feuilletage consiste à découper la pièce métallique en feuillets séparés par de l'isolant électrique afin d'empêcher les courants de Foucault de circuler. Le feuilletage doit être effectué dans une direction orthogonale aux courants de Foucault.



(a) Transformateur.



(b) Rotor d'un moteur électrique.

FIG. 1 : Feuilletage dans les machines électriques.

3 Inductance propre, inductance mutuelle

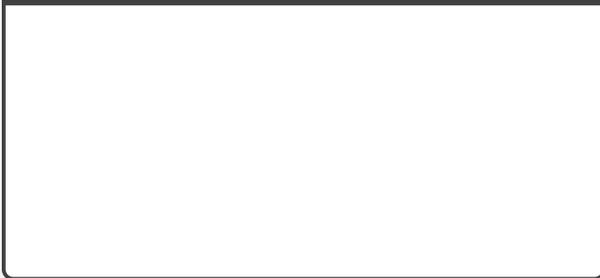
3.1 solénoïde

Champ magnétique créé par un solénoïde

Hypothèses

- Les effets de bord sont négligés.
- Le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde est nul.
- Le solénoïde est assimilé à une succession de spires resserrées et d'espacement constant.

SCHÉMA



Avec

- \vec{B} le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde (en T)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)
- N le nombre de spires du solénoïde (sans unité)
- l la longueur du solénoïde (en m)
- I le courant traversant le solénoïde (en A)

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} I \vec{e}_x$$

Hypothèses

- Les effets de bord sont négligés.
- Le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde est nul.
- Le solénoïde est assimilé à une succession de spires resserrées et d'espacement constant.

SCHÉMA

*Avec*

- Φ le flux magnétique propre du solénoïde (en $\text{T} \cdot \text{m}^2$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)
- N le nombre de spires du solénoïde (sans unité)
- l la longueur du solénoïde (en m)
- I le courant traversant le solénoïde (en A)
- R le rayon du solénoïde (en m)

$$\Phi = \pi R^2 \mu_0 \frac{N^2}{l} I$$

Le flux magnétique propre est proportionnel au courant. Cette propriété peut être généralisée. Le coefficient de proportionnalité est l'inductance propre.

Inductance propre

*Avec*

$$\Phi = LI$$

- Φ le flux magnétique propre (en $\text{T} \cdot \text{m}^2$)
- L l'inductance propre (en H)
- I l'intensité du courant (en A)

APPLICATION



Calculer l'inductance propre d'un solénoïde de 10 cm de long et de 1 cm de rayon comportant 1000 spires.

Relation tension-courant pour une bobine

*Avec*

$$u = L \frac{di}{dt}$$

- u la tension aux bornes de la bobine (en V)
- i le courant traversant la bobine ^a (en A)
- L l'inductance propre (en H)

^aEn convention récepteur

3.2 Énergie stockée

Énergie stockée dans une bobine



Avec

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}LI^2$$

- \mathcal{E} l'énergie stockée dans la bobine (en J)
- L l'inductance propre (en H)
- I l'intensité du courant (en A)

Dans l'exemple d'un solénoïde, l'énergie stockée s'écrit $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\mu_0\pi R^2\frac{N^2}{L}I^2$. On peut utiliser cette expression pour exprimer la densité volumique d'énergie magnétique.

Densité volumique d'énergie magnétique



Hypothèses L'expression obtenue pour un solénoïde peut être généralisée.

Avec

$$w = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

- w la densité volumique d'énergie magnétique (en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$)
- B le champ magnétique (en T)

3.3 Inductance mutuelle

Lorsque deux bobines sont présentes simultanément, le champ magnétique créé par l'une peut induire une tension dans l'autre. Ce phénomène s'appelle **induction mutuelle**.

Flux magnétique



Avec

$$\Phi_1 = \Phi_{1 \rightarrow 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 I_1 + M I_2$$

- Φ_1 le flux magnétique sur la bobine 1 (en $\text{T} \cdot \text{m}^2$)
- $\Phi_{1 \rightarrow 1}$ le flux propre de la bobine 1 (en $\text{T} \cdot \text{m}^2$)
- $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ le flux mutuel induit par la bobine 2 sur la bobine 1 (en $\text{T} \cdot \text{m}^2$)
- L_1 l'inductance propre de la bobine 1 (en H)
- M l'inductance mutuelle entre la bobine 1 et la bobine 2 (en H)
- I_1 l'intensité du courant circulant dans la bobine 1 (en A)
- I_2 l'intensité du courant circulant dans la bobine 2 (en A)

L'inductance mutuelle M dépend de la géométrie et de la position relative des deux bobines. Si les bobines sont infiniment éloignées, $M = 0$.

Avec

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$$

- \mathcal{E} l'énergie stockée dans les bobines (en J)
- L_1 l'inductance propre de la bobine 1 (en H)
- L_2 l'inductance propre de la bobine 2 (en H)
- M l'inductance mutuelle entre la bobine 1 et la bobine 2 (en H)
- I_1 l'intensité du courant circulant dans la bobine 1 (en A)
- I_2 l'intensité du courant circulant dans la bobine 2 (en A)

En plus de l'énergie stockée dans chacune des bobines $\frac{1}{2}L_1I_1^2$ et $\frac{1}{2}L_2I_2^2$, un troisième terme MI_1I_2 correspondant à l'interaction des bobines apparaît.

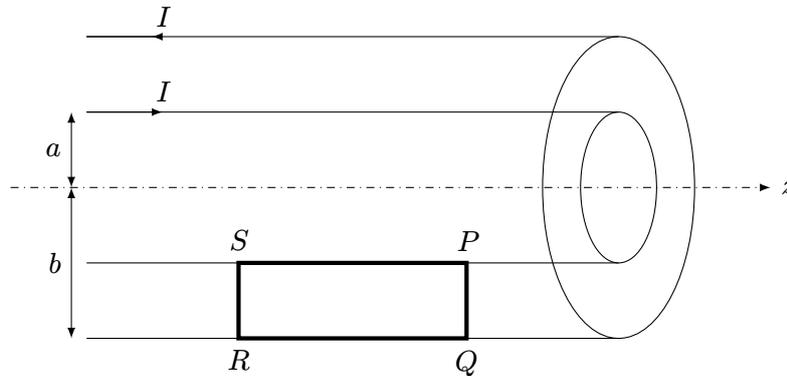
Avec

$$M \leq \sqrt{L_1L_2}$$

- M l'inductance mutuelle entre la bobine 1 et la bobine 2 (en H)
- L_1 l'inductance propre de la bobine 1 (en H)
- L_2 l'inductance propre de la bobine 2 (en H)

TD

1 Inductance d'un câble coaxial

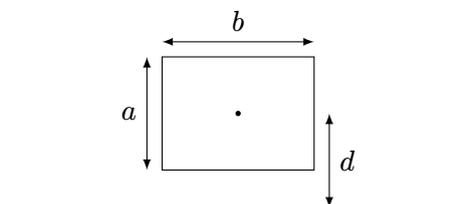


Un câble coaxial, considéré comme infiniment long et placé dans un milieu de perméabilité magnétique μ_0 , est formé de deux armatures cylindriques de même axe (O, z) . L'armature intérieure (l'âme) est un cylindre **creux** de rayon a . L'armature extérieure (la gaine) est un cylindre creux de rayon b . Le courant continu d'intensité I qui circule dans l'âme, dans le sens de $+\vec{u}_z$, revient avec la même intensité dans la gaine selon $-\vec{u}_z$. Ce câble constitue un circuit fermé.

À un point M de l'espace, on associera les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) et la base cylindrique directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{u}_z)$.

1. Déterminer l'orientation du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par ce câble ainsi que les variables dont il peut dépendre en un point M quelconque de l'espace.
2. Donner la valeur de $\vec{B}(M)$ pour un point intérieur à l'âme ($\rho < a$), ou extérieur à la gaine ($b < \rho$). Justifier.
3. Exprimer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par ce câble en tout point M situé à la distance ρ de son axe, $a < \rho < b$.
4. Calculer le flux de $\vec{B}(M)$ à travers une surface rectangulaire $PQRS$ correspondant à une longueur l du câble, orientée dans le sens de $+\vec{e}_\phi$.
5. Rappeler l'expression générale qui lie le flux de $\vec{B}(M)$ à l'inductance propre (ou coefficient d'auto-inductance) et en déduire l'inductance L d'une longueur l du câble en fonction de μ_0 , l , a et b .
6. Application numérique pour un câble standard, où $l = 1$ m, $a = 1$ mm et $b = 3$ mm.

2 Mutual inductance between a wire and a frame

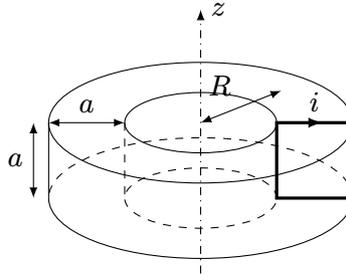


We study an infinite electric wire and a conductive frame. The two objects are coplanar. The center of the frame is at a distance d of the wire.

Ascertain the mutual inductance between the two circuits. Note : it might be easier to determine the field produced by the wire and its flux on the frame than the opposite.

3 Inductance propre d'un tore

On considère un tore de rayon moyen R , de section carrée de côté a , sur lequel on enroule un fil en formant N spires carrées jointives.



L'espace est repéré par le système de coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, l'origine étant prise sur l'axe du tore, au centre du cercle moyen de rayon R . Chaque spire carrée appartient à un plan passant par l'axe.

Le circuit ainsi constitué est parcouru par un courant d'intensité $i(t)$, orienté selon le sens indiqué sur la figure.

On se place dans le cadre de l'ARQS.

1. Calculer le champ magnétique créé par le courant d'intensité $i(t)$ dans tout l'espace.
2. En déduire l'expression de l'inductance propre \mathcal{L} . Calculer numériquement \mathcal{L} pour $N = 100$ et $N = 1000$. On donne $a = 1 \times 10^{-2}$ cm et $R = 5 \times 10^{-2}$ cm.
3. Montrer que lorsque $R \gg a$, on peut considérer que le champ est uniforme sur une section droite et déterminer sa valeur.
4. Calculer l'énergie électromagnétique volumique puis l'énergie totale stockée dans tout l'espace et donner son expression en fonction de \mathcal{L} et $i(t)$. Commenter le résultat obtenu.