

Électromagnétisme 4

Milieux ferromagnétiques

COMPÉTENCES

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- Décrire, à partir d'une formule fournie exprimant le champ d'un dipôle magnétique, le champ créé par un aimant à grande distance et représenter qualitativement les lignes de champ magnétique.
- Utiliser les expressions fournies de l'énergie potentielle, de la résultante et du moment.
- Décrire qualitativement l'évolution d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur.
- Établir l'expression du magnéton de Bohr dans le cadre du modèle de Bohr.
- Définir le champ d'aimantation d'un milieu magnétique.
- Associer à une distribution d'aimantation une densité volumique de courants liés équivalente, l'expression étant admise.
- Définir le vecteur excitation magnétique.
- Écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique.
- Interpréter qualitativement que les sources de l'excitation magnétique sont les courants électriques libres, et que celles de champ magnétique sont les courants électriques libres et l'aimantation.
- Représenter l'allure des cycles d'hystérésis (excitation magnétique, aimantation) et (excitation magnétique, champ magnétique) d'un milieu ferromagnétique.
- Distinguer milieu dur et milieu doux ; citer des exemples de matériaux.
- Modéliser un milieu doux par une relation constitutive linéaire.
- Définir la perméabilité relative et donner un ordre de grandeur.
- Décrire l'allure des lignes de champ dans un circuit magnétique en admettant que les lignes de champ sortent orthogonalement à l'interface dans un entrefer.
- Exprimer le champ magnétique produit dans l'entrefer d'un électroaimant.
- Établir l'expression de l'inductance propre de la bobine à noyau.
- Vérifier l'expression de l'énergie magnétique : $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau$.
- Exprimer le lien entre l'aire du cycle hystérésis et la puissance moyenne absorbée.
- Décrire les différents termes de pertes d'une bobine à noyau : pertes fer par courants de Foucault et par hystérésis, pertes cuivre.

RÉSUMÉ DU COURS

1 Moment magnétique d'un aimant permanent

1.1 Dipole magnétique

Une spire circulaire parcourue par un courant produit un champ magnétique caractérisé par son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$.

Moment magnétique d'une spire

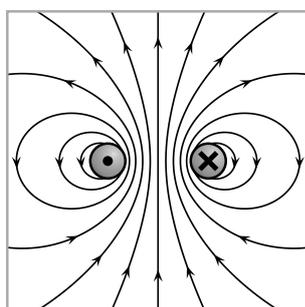
$$\vec{\mathcal{M}} = i \vec{S}$$

Avec

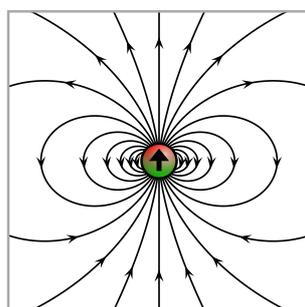
- $\vec{\mathcal{M}}$ le moment magnétique (en $A \cdot m^2$)
- i le courant parcourant la spire (en A)
- \vec{S} la surface orientée de la spire (en m^2)

Si on fait tendre vers 0 le rayon d'une spire circulaire en gardant constant son moment magnétique, on obtient un dipole magnétique.

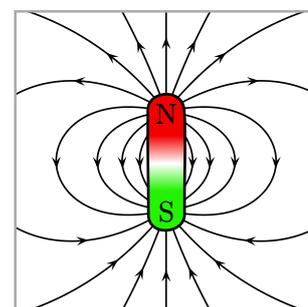
Le dipole magnétique est un système ponctuel. Le dipole magnétique est le plus simple système ayant un moment magnétique.



(a) Spire



(b) Dipole magnétique



(c) Aimant

FIG. 1 : Champs magnétiques créés par différents systèmes. Ils sont similaires à grande distance.

Champ magnétique créé par un dipole magnétique

Hypothèses

- Le moment magnétique est orienté selon \vec{e}_z .
- Le système de coordonnées est sphérique.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec

- \vec{B} le champ magnétique (en T)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)
- $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{e}_z$ le moment magnétique (en $\text{A} \cdot \text{m}^2$)

SCHÉMA

Équation des lignes de champ

Hypothèses

- Le moment magnétique est orienté selon \vec{e}_z .
- Le système de coordonnées est sphérique.

Avec r , θ et ϕ les coordonnées sphérique.

$$r = K \sin^2 \theta$$
$$\phi = cte$$

APPLICATION

Tracer les lignes de champ magnétique créées par un dipole magnétique.

1.2 Champ créé par un aimant

Si on se place suffisamment loin, le champ créé par un aimant, par une spire et par un dipole magnétique sont similaires. On définit le moment magnétique d'un aimant comme le moment magnétique du dipole magnétique ayant le même champ magnétique à grande distance

APPLICATION

Déterminer la norme du champ magnétique à la surface de la terre à Quimper ($47^\circ 59' N, 4^\circ 05' O$). On donne $\mathcal{M}_{\text{Terre}} = 7,7 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ et $R_{\text{Terre}} = 6400 \text{ km}$.

1.3 Action subie par un moment magnétique

Lorsqu'un système possédant un moment magnétique est placé dans un champ magnétique extérieur, il subit des actions de sa part.

Énergie potentielle d'interaction entre un système possédant un moment magnétique et un champ magnétique extérieur

$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

Avec

- \mathcal{E}_p l'énergie potentielle (en J)
- \vec{B}_{ext} le champ magnétique extérieur (en T)
- $\vec{\mathcal{M}}$ le moment magnétique (en $\text{A} \cdot \text{m}^2$)

L'énergie potentielle est minimale lorsque le moment magnétique est aligné au champ. Un moment magnétique a tendance à s'aligner au champ magnétique.

Force subie par un système possédant un moment magnétique

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\mathcal{E}_p$$

Avec

- \vec{F} la force subie (en N)
- \mathcal{E}_p l'énergie potentielle (en J)

Couple subi par un système possédant un moment magnétique

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Avec

- $\vec{\Gamma}$ le couple subi (en $\text{N} \cdot \text{m}$)
- $\vec{\mathcal{M}}$ le moment magnétique (en $\text{A} \cdot \text{m}^2$)
- \vec{B} le champ magnétique (en T)

On retrouve un couple nul lorsque le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique.

APPLICATION



Déterminer la période d'oscillation d'une aiguille de boussole ($\vec{\mathcal{M}} = 15 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \vec{e}_r$, $J = 1 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ selon \vec{e}_r) dans le champ magnétique terrestre. La liaison pivot entre l'aiguille et son support est supposée idéale.

1.4 Magnéton de Bohr

Dans le modèle de Bohr, un électron décrit une trajectoire circulaire autour d'un noyau. L'électron a un moment cinétique quantifié $L = n\hbar$.

Hypothèses

- L'électron décrit une trajectoire circulaire autour d'un noyau.
- L'électron a un moment cinétique quantifié $L = n\hbar$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

$$\mathcal{M} = n\mu_B$$

Avec

- \mathcal{M} le moment magnétique de l'électron (en $\text{A} \cdot \text{m}^2$)
- $n \in \mathbb{Z}$ un entier (sans unité)
- $\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e}$ le magnéton de Bohr (en $\text{A} \cdot \text{m}^2$)
- e la charge élémentaire (en C)
- m_e la masse d'un électron (en kg)
- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Plank réduite (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
- h la constante de Plank (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)

2 Equations de Maxwell dans un milieu magnétique

2.1 Aimantation

Les particules qui constituent la matière peuvent porter un moment magnétique (moment magnétique orbital des électrons, spin des électrons et des noyaux).

L'aimantation est le moment magnétique par unité de volume.

Aimantation

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{\mathcal{M}}}{\delta V}$$

Avec

- \vec{M} l'aimantation (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$)
- $\vec{\mathcal{M}}$ le moment magnétique (en $\text{A} \cdot \text{m}^2$)

Il est possible de définir des courants fictifs $\vec{j}_{\text{lié}}$ qui, s'ils existaient, donneraient lieu à la même aimantation \vec{M}

Courants liés

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \text{rot} \vec{M}$$

Avec

- $\vec{j}_{\text{lié}}$ les courants fictifs qui donneraient lieu, s'ils existaient, à une aimantation \vec{M} (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$)
- \vec{M} l'aimantation (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$)

2.2 Vecteur excitation magnétique

Les effets de l'aimantation sont pris en compte dans les équations de Maxwell à travers les courants liés.

Hypothèses Dans l'ARQS magnétique.

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}}$$

Avec

- $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ l'excitation magnétique (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$)
- \vec{j}_{libre} le vecteur densité des **vrais** courants (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)
- \vec{M} l'aimantation (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$)
- \vec{B} le champ magnétique (en T)

Les sources de l'excitation magnétique sont donc les courants électriques libres. Les sources du champ magnétique sont les courants électriques libres et l'aimantation.

2.3 Équations de Maxwell intégrées

Dans les milieux magnétiques, l'équation de Maxwell-Faraday est inchangée donc la loi de Lenz-Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ s'applique toujours.

Dans les milieux magnétiques, l'équation de Maxwell-Thomson est inchangée donc le champ magnétique \vec{B} est toujours à flux conservatif.

Théorème d'Ampère

Hypothèses Dans l'ARQS magnétique.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre, enlacé}}$$

Avec

- $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ l'excitation magnétique (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$)
- \mathcal{C} une courbe fermée orientée.
- $I_{\text{libre, enlacé}}$ le courant libre^a enlacé par \mathcal{C} (en A)

^aC'est-à-dire le « vrai » courant.

Théorème d'Ampère dans un milieu magnétique

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre, enlacé}}$$

3 Milieux ferromagnétiques

3.1 Présentation

Un matériau ferromagnétique est un matériau dans lequel les dipôles magnétiques (de spin, orbital, ...) ont tendance à s'aligner sur le champ magnétique extérieur. Dans un milieu ferromagnétique, l'aimantation \vec{M} et le champ magnétique \vec{B} croient avec l'excitation magnétique \vec{H} .

Un matériau ferromagnétique canalise les lignes de champ magnétique. Lorsque des lignes de champ sortent d'un matériau ferromagnétique, elles sortent perpendiculairement à l'interface.

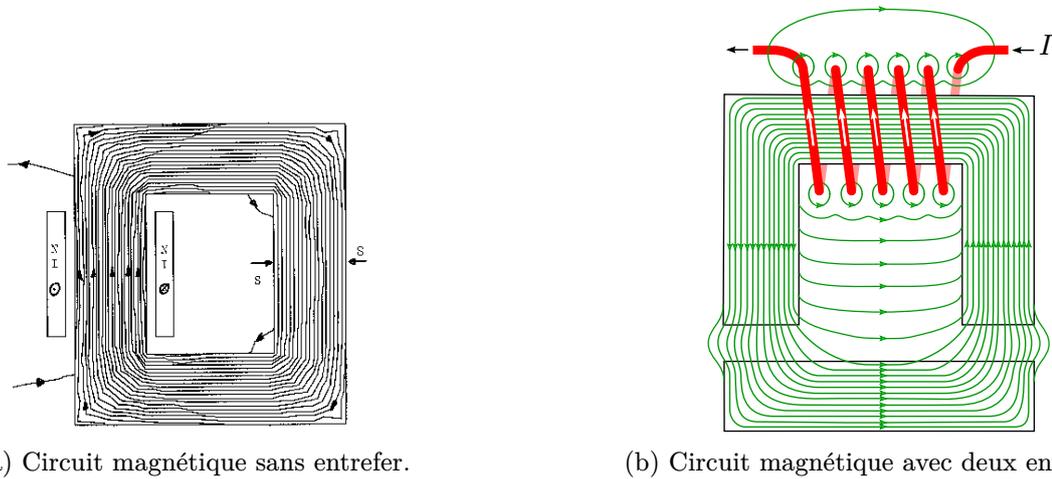


FIG. 2 : Simulation des lignes de champ dans un matériau ferromagnétique. Les lignes de champ sont guidées par le matériau ferromagnétique.

3.2 Présentation empirique : le cycle d'hystérésis

Pour un matériau ferromagnétique, le champ magnétique \vec{B} et l'aimantation \vec{M} dépendent de l'excitation magnétique. Cette dépendance comporte une hystérésis.

SCHÉMA Cycle d'hystérésis

L'aimantation peut saturer, ce qui correspond à un état où tous les dipôles magnétiques sont orientés dans le même sens que l'excitation magnétique \vec{H} .

L'aimantation rémanente et le champ magnétique rémanent sont l'aimantation et le champ magnétique subsistant lorsque l'excitation magnétique est nul.

L'excitation coercitive est l'excitation qu'il faut appliquer pour que le champ magnétique et l'aimantation soient nulles¹.

3.3 Matériaux ferromagnétiques durs

Un matériau ferromagnétique dur est un matériau ferromagnétique dont le cycle d'hystérésis est large.

¹En toute rigueur, l'excitation magnétique qu'il faut pour avoir $B = 0$ n'est pas exactement celle qu'il faut appliquer pour avoir $M = 0$, mais elles sont très proches.

SCHÉMA Cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique dur

Un matériau dur a une grande aimantation rémanente et un grand champ magnétique rémanent. Les matériaux ferromagnétiques durs sont utilisés pour fabriquer des aimants permanents.

EXEMPLE

Le fer et les alliages à base de néodyme sont des matériaux ferromagnétiques durs.

3.4 Matériaux ferromagnétiques doux

Un matériau ferromagnétique dur est un matériau ferromagnétique dont le cycle d'hystérésis est fin et linéaire dans une certaine zone.

EXEMPLE

La ferrite est un matériau ferromagnétique doux.

SCHÉMA Cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique doux

Perméabilité magnétique

Hypothèses

- Pour un matériau ferromagnétique doux.
- Dans la zone de linéarité.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Avec

- \vec{B} le champ magnétique (en T)
- \vec{H} l'excitation magnétique (en $A \cdot m^{-1}$)
- $\mu = \mu_0 \mu_r$ la perméabilité magnétique du milieu ferromagnétique (en $H \cdot m^{-1}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $H \cdot m^{-1}$)
- μ_r la perméabilité magnétique relative du milieu ferromagnétique (sans unité)

La perméabilité magnétique relative est de l'ordre de $\mu_r \sim 10^5$.

4 Circuits ferromagnétiques

4.1 Circuit magnétique sans entrefer

4.1.1 Présentation générale

Un circuit magnétique sans entrefer est constitué d'un matériau ferromagnétique formant une boucle autour duquel est enroulé un fil parcourant par un courant électrique.

SCHÉMA Circuit magnétique sans entrefer

Le matériau guide les lignes de champ, elles ont donc une forme similaire à celle du circuit magnétique. Pour étudier le système, on s'intéresse à une ligne de champ moyenne.

Relation champ magnétique - tension

Hypothèses

- Dans l'ARQS magnétique.
- Le circuit magnétique a une section constante.
- Le champ magnétique est uniforme dans le matériau ferromagnétique.

Avec

- e la tension aux bornes de l'enroulement (en convention générateur) (en V)
- N le nombre de spires de l'enroulement (sans unité)
- B le champ magnétique (en T)
- t le temps (en s)

$$e = -NS \frac{dB}{dt}$$

Cette relation est mise à profit pour mesurer le champ magnétique et tracer le cycle d'hystérésis.

Hypothèses

- Dans l'ARQS magnétique.
- Le circuit magnétique a une section constante.
- L'excitation magnétique est uniforme dans le matériau ferromagnétique.

Avec

- H l'excitation magnétique (en $A \cdot m^{-1}$)
- N le nombre de spires de l'enroulement (sans unité)
- l la longueur du circuit magnétique^a (en m)
- i l'intensité du courant dans l'enroulement (en A)

$$Hl = Ni$$

^aPlus précisément, la longueur d'une ligne de champ moyenne

Cette relation est mise à profit pour mesurer l'excitation magnétique et tracer le cycle d'hystérésis.

Si la tension e aux bornes de l'enroulement est sinusoïdale, cela n'implique pas que l'intensité du courant i le soit également. Si le matériau ferromagnétique est doux et hors saturation, alors l'intensité du courant a la même forme que la tension.



4.2 Bobine à noyau ferromagnétique

Le circuit magnétique sans entrefer peut être utilisé pour réaliser une bobine. Pour cela, on utilise un matériau ferromagnétique doux hors saturation.

4.2.1 Inductance propre

Inductance propre d'une bobine avec noyau ferromagnétique

Hypothèses

- Dans l'ARQS magnétique.
- L'excitation magnétique et le champ magnétique sont uniformes dans le matériau ferromagnétique.
- Le matériau ferromagnétique est doux et hors saturation.
- Le circuit magnétique ne comporte pas d'entrefer.
- Le circuit magnétique a une section constante.

Avec

- L l'inductance propre (en H)
- N le nombre de spires (sans unité)
- $\mu = \mu_0\mu_r$ la perméabilité magnétique du matériau ferromagnétique (en $H \cdot m^{-1}$)
- S la section du circuit magnétique (en m^2)

$$L = \frac{N^2 S \mu}{l}$$

Cette inductance propre est $\mu_r \gg 1$ fois plus grande que celle d'un tore sans cœur ferromagnétique de dimensions équivalentes.

4.2.2 Aspect énergétique

Densité volumique d'énergie magnétique



Hypothèses

- Dans l'ARQS magnétique.
- Le matériau ferromagnétique est doux et hors saturation.
- La formule établie pour un circuit magnétique sans entrefer peut être généralisée.

Avec

- w la densité volumique d'énergie magnétique (en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)
- μ_r la perméabilité magnétique relative (sans unité)
- B le champ magnétique

$$w = \frac{1}{2\mu_0\mu_r} B^2$$

4.2.3 Pertes

La présence d'un milieu ferromagnétique au cœur de la bobine induit des pertes.

Pertes par hystérésis



Hypothèses

- Dans l'ARQS magnétique.
- L'excitation magnétique et le champ magnétique sont uniformes dans le matériau ferromagnétique.
- Le circuit magnétique a une section constante.
- Le circuit magnétique ne comporte pas d'entrefer.

Avec

- $\mathcal{P}_{\text{hystérésis}}$ la puissance des pertes par hystérésis (en W)
- V le volume du circuit magnétique (en m^3)
- f la fréquence de la tension alimentant la bobine (en f)
- \mathcal{A} l'aire du cycle d'hystérésis (en $\text{T} \cdot \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$)

$$\langle \mathcal{P}_{\text{hystérésis}} \rangle = Vf\mathcal{A}$$

Pour limiter les pertes par hystérésis, on utilise des matériaux ferromagnétiques doux.

Le circuit magnétique étant un conducteur électrique placé dans un champ magnétique variable, des courants de Foucault y sont induits. Pour limiter les pertes par courant de Foucault, on utilise le feuilletage.

Pertes par courant de Foucault et pertes par hystérésis sont appelées les **pertes fer** car elles se produisent dans le matériau ferromagnétique.

Des pertes par effet Joule se produisent également dans le bobinage, souvent réalisé en cuivre. Les pertes par effet Joule sont appelées pertes cuivre.

4.3 Circuit magnétique avec entrefer

Un entrefer est une zone de l'espace vide² au sein du circuit magnétique. Un circuit magnétique avec entrefer est appelé un électroaimant car il permet de réaliser un champ magnétique dans une zone de l'espace

²Vide de matériau ferromagnétique.

grâce à un courant électrique.

SCHÉMA Circuit magnétique avec entrefer

Champ magnétique dans l'entrefer d'un électroaimant

13

Hypothèses

- Dans l'ARQS magnétique.
- L'excitation magnétique et le champ magnétique sont uniformes dans le matériau ferromagnétique.
- Le circuit magnétique a une section constante.
- Les effets de bord sont négligés dans l'entrefer^a.
- Le matériau ferromagnétique est doux et hors saturation.

Avec

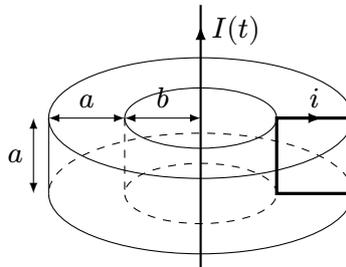
- B_{entrefer} le champ magnétique dans l'entrefer (en T)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)
- N le nombre de spires de l'enroulement (sans unité)
- i l'intensité du courant parcourant l'enroulement (en A)
- e l'épaisseur de l'entrefer.

$$B_{\text{entrefer}} = \frac{\mu_0 Ni}{e}$$

^aAutrement dit, l'épaisseur de l'entrefer est très petite devant toutes les autres dimensions.

TD

1 Pince ampère-métrique

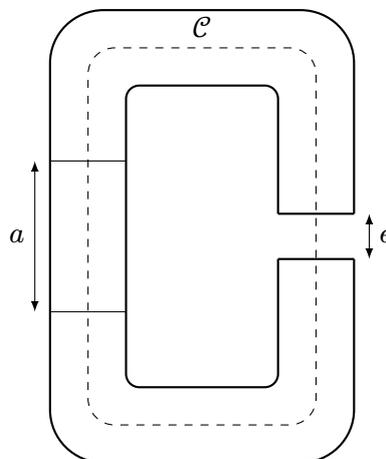


Une pince ampère-métrique sert à mesurer l'intensité d'un courant sans ouvrir le circuit. Elle est schématiquement constituée d'un tore ferromagnétique à base carrée, de côté a , milieu doux, non saturé, linéaire de perméabilité μ , sur lequel sont entourées N spire jointives. La figure montre une coupe transversale du dispositif.

Les spires sont électriquement branchées aux bornes d'une résistance R , de valeur très supérieure à celle du bobinage. On note $u(t)$ la tension aux bornes de R et $i(t)$ le courant circulant dans le bobinage et R . Le tore est centré sur le fil infiniment long dont on mesure l'intensité $I(t)$.

1. Calculer le champ \vec{H}_I créé dans tout l'espace par $I(t)$. En déduire le flux magnétique ϕ_I reçu par le bobinage.
2. Calculer le flux ϕ_i créé par $i(t)$ et reçu par le bobinage.
3. Établir une équation différentielle liant $u(t)$ et $I(t)$
4. Quelle est la fonction de transfert $H(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$? En déduire comment choisir les paramètres constitutifs de la pince afin que u soit directement proportionnel à I .

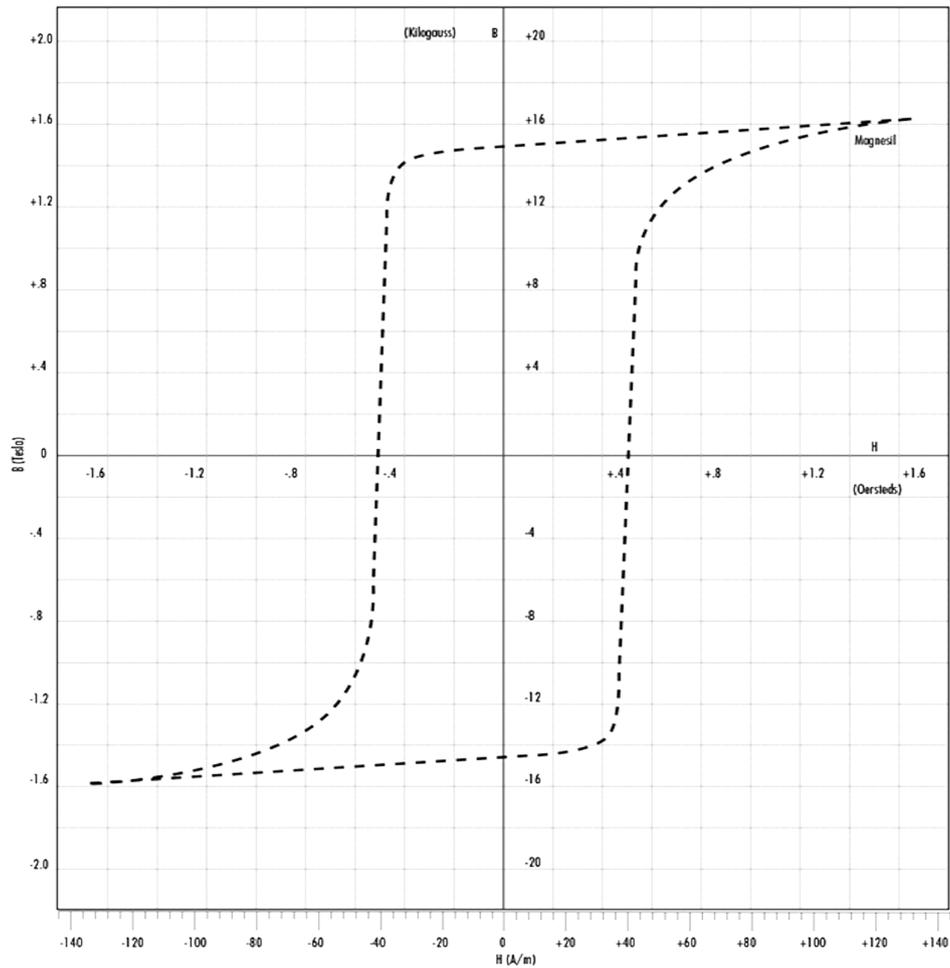
2 Permanent magnet



We study a magnetic circuit which section S is constant composed of

- a magnet of length $a = 10$ cm described by its hysteresis cycle given below ;

- electrical steel of length l_F considered linear, homogenous, isotropic, transparent, of infinite magnetic permeability;
- an air gap of length $e = 1$ mm.



We suppose the fields to be unidimensional, we neglect any field leak and any side effect.

1. How does the hysteresis cycle needs to be for a good permanent magnet? Should a soft or hard material be used?
2. Show that the vector \vec{H} is null in the electrical steel.
3. Ascertain a relation between B_a and H_a in the magnet. Deduce graphically their value. How many solutions are their?
4. What are B_e and H_e value in the air gap?