Électronique 1
Stabilité des systèmes linéaires

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Transposer la fonction de transfert opérationnelle linéaire dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (équation différentielle).
- ❑ Étudier la stabilité d'un système d'ordre 1 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.
- ❑ Étudier la stabilité d'un système d'ordre 2 à partir des signes des coefficients de l'équation différentielle ou de la fonction de transfert.

Résumé du cours

1 Introduction

Application

Pour chacune des deux équations différentielles ci-dessous, dire si ses solutions divergent ou non.

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = 4$$

À la fin de ce chapitre, vous saurez répondre à cette question en un coup d'œil et sans calculs.

2 Système linéaire

Un système est un dispositif qui traite une ou des entrées et produit une ou des sorties.

Schéma Système

Exemple

Vanne (angle d'un robinet → débit), moteur électrique (tension → vitesse de rotation).

Un système linéaire est un système continu dont la sortie dépend linéairement de l'entrée.

Schéma Système linéaire

3 Équation différentielle et fonction de transfert

3.1 Exemple introductif : circuit RC série

3.1.1 Point de vue temporel

Équation différentielle régissant la tension dans un circuit RC [2]

Hypothèses

- le circuit est dans l'ARQS

Schéma

Avec

- $s(t)$ tension aux bornes du condensateur (en V)
- R résistance du résistor (en Ω)
- C capacité du condensateur (en F)
- $e(t)$ tension en entrée du circuit (en V)

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s = \frac{1}{RC}e(t)$$

3.1.2 Point de vue spectral

Fonction de transfert d'un circuit RC [3]

Hypothèses

- le circuit est dans l'ARQS

Schéma

Avec

- $S(p)$ grandeur de Laplace associée à la tension aux bornes du condensateur (en V)
- R résistance du résistor (en Ω)
- C capacité du condensateur (en F)
- $E(p)$ grandeur de Laplace associée à la tension en entrée du circuit (en V)
- p variable de Laplace (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)

$$pS(p) + \frac{1}{RC}S(p) = \frac{1}{RC}E(p)$$

3.2 Relation entre équation différentielle et fonction de transfert

Une forte ressemblance entre les 2 équations précédentes peut être remarquée. Cette ressemblance peut être généralisée.

Correspondance entre les domaines

temporel	de Laplace	Fréquentiel
$e(t)$	$E(p)$	$\underline{e}(j\omega)$
$s(t)$	$S(p)$	$\underline{s}(j\omega)$
$\frac{d}{dt}$	p	$j\omega$
$\frac{d^2}{dt^2}$	p^2	$(j\omega)^2 = -\omega^2$

Application [4]

Déterminer la fonction de transfert associée à l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s = \frac{de}{dt}$$

Application [5]

Déterminer l'équation différentielle associée à la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$$

4 Stabilité

4.1 Présentation

Un système stable a une sortie bornée si son entrée est bornée.

En pratique, un système instable a sa sortie en saturation car elle ne peut pas augmenter ou diminuer indéfiniment.

4.2 Système du premier ordre

Influence du numérateur [6]

Hypothèses

- système linéaire

Le numérateur de la fonction de transfert n'influence la stabilité du système.

Critère de stabilité [7]

Hypothèses

- système linéaire
- système du 1er ordre

Le système est stable si les 2 coefficients du dénominateur sont de même signe.

Application 8

Les fonctions de transfert suivantes correspondent-elles à des systèmes stables ?

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$H(p) = \frac{1 + RCp}{1 - jRCp}$$

Application 9

Les équations différentielles suivantes correspondent-elles à des sytèmes stables ?

$$2\frac{ds}{dt} - \frac{R}{L}s = \frac{de}{dt} - \frac{R}{L}e$$

$$\frac{ds}{dt} + \frac{R}{L}s = 0$$

$$2\frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} = \frac{R}{L}e - \frac{R}{L}s$$

4.3 Système d'ordre 2

Critère de stabilité 10

Hypothèses

- système linéaire
- système d'ordre 2

Le système est stable si les 3 coefficients du dénominateur sont de même signe.

Application 11

Les fonctions de transfert suivantes correspondent-elles à des systèmes stables ?

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + RCp - LCp^2}$$

Application 12

Les équations différentielles suivantes correspondent-elles à des sytèmes stables ?

$$-LC\frac{d^2s}{dt^2} - RC\frac{ds}{dt} - s = -e$$

Méthodes

1 Résoudre une équation différentielle d'ordre 1 linéaire à coefficients constants

1. Résoudre l'équation homogène :
   - Mettre sous la forme canonique $\frac{ds}{dt} + \alpha s = 0$.
   - La solution est $s(t) = Ke^{-\alpha t}$ avec K un réel.
2. Trouver 1 solution particulière : on la cherche de la même forme que le second membre.
3. Grâce aux conditions initiales, trouver K

Application 13

Résoudre $L\frac{di}{dt} + Ri = U$ où U est une constante, sachant que $i(t = 0) = 0$

2 Résoudre une équation différentielle d'ordre 2 linéaire à coefficients constants

1. Résoudre l'équation homogène :
   - Déterminer le polynôme caractéristique.
   - Déterminer le signe du discriminent.
     - Si $\Delta > 0$ la solution est $K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique.
     - Si $\Delta = 0$ la solution est $(K_1 + K_2 t)e^{rt}$ où r est la racine du polynôme caractéristique.
     - Si $\Delta < 0$ la solution est $(K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))\, e^{\alpha t}$ où α et β sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une des racines du polynôme caractéristique.
2. Trouver 1 solution particulière : on la cherche de la même forme que le second membre.
3. Grâce aux conditions initiales, trouver K_1 et K_2.

Application 14

Résoudre $LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = E$ en distinguant les 3 cas possibles, sachant que $u(0) = 0$ et $\left.\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{RC}$

TD

1 Étude de fonctions de transfert

Pour chacune des fonctions de transfert ci-dessous, donner l'équation différentielle associée et dire si elles décrivent un système stable ou instable.

1. $H = \dfrac{p}{1+p}$

2. $H = \dfrac{p^2}{1-p+p^2}$

3. $H = \dfrac{1}{1+jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$

2 Filtres et fonctions de transfert

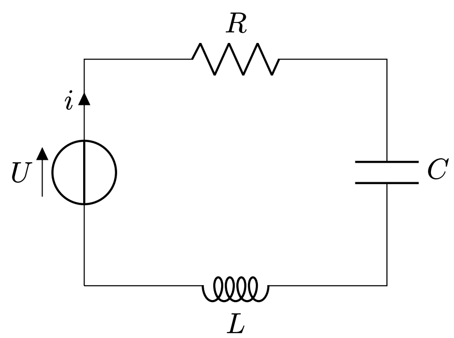
1. Proposer deux circuits électroniques différents réalisant un filtre passe-haut du premier ordre.

2. Donner (sans les redémontrer) les fonctions de transfert des ces deux circuits.

3. Ces deux circuits sont-ils stables ?

3 Oscillateur RLC

Dans le montage ci-dessous, le générateur impose une tension U proportionnelle au courant i qui le traverse. On note α le coefficient de proportionnalité, de sorte que $U = \alpha i$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

2. Sous quelle condition sur α le système est-il stable.