

3. Couplage d'oscillateurs par mutuelle inductance ☺☺

1) Pour la maille de gauche $E = \frac{-q_1}{C} + u_1$ avec $u_1 = L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$, $i_1 = \frac{-dq_1}{dt}$ et $i_2 = \frac{-dq_2}{dt}$ (le signe - provient du fait que le courant rencontre l'armature portant la charge -q) d'où

$$E = \frac{-q_1}{C} + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = \frac{-q_1}{C} - L \frac{d^2 q_1}{dt^2} - M \frac{d^2 q_2}{dt^2} \text{ d'où } \boxed{\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_1}{LC} + \frac{E}{L} = 0} \text{ . Par}$$

identification : $\alpha = \frac{M}{L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pour la maille de droite $u_2 = \frac{q_2}{C} = L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$ d'où en remplaçant les intensités : $\frac{q_2}{C} = -L \frac{d^2 q_2}{dt^2} - M \frac{d^2 q_1}{dt^2}$ d'où

$$\boxed{\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{M}{L} \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_2}{LC} = 0} \text{ . On trouve pour } \alpha \text{ et } \omega_0 \text{ les mêmes expressions que pour l'équation précédente ce}$$

qui est normal .

2) Pour passer à la notation complexe, on remplace chaque dérivée temporelle par une multiplication par $j\omega$, on obtient ainsi les deux équations :

$$\boxed{-\omega^2(\underline{q}_1 + \alpha \underline{q}_2) + \omega_0^2 \underline{q}_1 + \frac{E}{L} = 0} \text{ (1) et } \boxed{-\omega^2(\underline{q}_2 + \alpha \underline{q}_1) + \omega_0^2 \underline{q}_2 = 0} \text{ (2) .}$$

3) Grâce à l'équation 2, on obtient : $\underline{q}_1 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\alpha \omega^2} \underline{q}_2$ d'où $-\omega^2 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\alpha \omega^2} \underline{q}_2 + \alpha \underline{q}_2 \right) + \omega_0^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\alpha \omega^2} \underline{q}_2 + \frac{E}{L} = 0$ d'où

$$-\omega^2 \underline{q}_2 (\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha^2 \omega^2) + \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2) \underline{q}_2 + \frac{E \alpha \omega^2}{L} = 0 \text{ d'où } [-\omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 - \alpha^2 \omega^4 + \omega_0^4 - \omega_0^2 \omega^2] \underline{q}_2 + \frac{E \alpha \omega^2}{L} = 0$$

d'où $\boxed{\underline{q}_2 = \frac{-E \alpha \omega^2}{L [-2 \omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 (1 - \alpha^2) + \omega_0^4]}}$.

4) $\boxed{|q_2| = \frac{E_0 \alpha \omega^2}{L |-2 \omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 (1 - \alpha^2) + \omega_0^4|}}$. $\lim_{t \rightarrow \infty} |q_2| = \lim_{t \rightarrow 0} |q_2| = 0$.

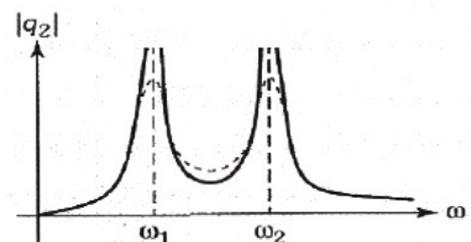
$|q_2| = +\infty$ quand le dénominateur est nul c'est à dire quand $+X^2(1 - \alpha^2) - 2\omega_0^2 X + \omega_0^4 = 0$ où $X = \omega^2$ (pour la valeur 0, on peut retirer les valeurs absolues).

Pour déterminer X, on résout l'équation : $\Delta = 4\omega_0^4 - 4\omega_0^4(1 - \alpha^2) = 4\alpha^2 \omega_0^4$ d'où

$$X_1 = \frac{(2\omega_0^2 - 2\alpha \omega_0^2)}{2(1 - \alpha^2)} = \frac{\omega_0^2(1 - \alpha)}{(1 - \alpha^2)} = \frac{\omega_0^2}{(1 + \alpha)} \text{ soit } \boxed{\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \alpha}}} \text{ et}$$

$$X_2 = \frac{(2\omega_0^2 + 2\alpha \omega_0^2)}{2(1 - \alpha^2)} = \frac{\omega_0^2(1 + \alpha)}{(1 - \alpha^2)} = \frac{\omega_0^2}{(1 - \alpha)} \text{ soit } \boxed{\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \alpha}}}$$

d'où le graphe ci-contre:



5) Si on fait l'expérience, il existera des phénomènes dissipatifs qui rendront la résonance finie (courbe en pointillés).

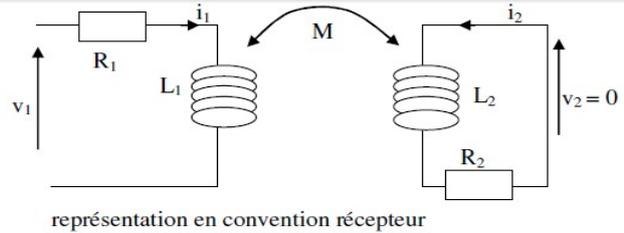
4. Chauffage par induction

(Rem : il manque les barres sous les grandeurs complexes)

1. Ecrivons les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre les intensités i_1 et i_2 circulant dans chacun d'eux).

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et}$$

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



2. En passant en expressions complexes : $v_1 = R_1 i_1 + jL_1 \omega i_1 + jM \omega i_2$ (1)

et

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + jL_2 \omega i_2 + jM \omega i_1 \quad (2)$$

De (2) on tire :

$$i_2 = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \cdot i_1$$

donc l'amplitude complexe :

$$A = i_2/i_1 = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$$

On injecte ce résultat dans (1), d'où l'impédance complexe d'entrée du bobinage inducteur $Z_e = \underline{V}_1 / \underline{I}_1$.

$$Z_{e1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

3. Compte tenu de la fréquence choisie $R_1 \ll L_1 \cdot \omega$ (numériquement $R_1 = 0,018 \Omega$ et $L_1 \cdot \omega = 4,7 \Omega$) et $R_2 \ll L_2 \cdot \omega$ (numériquement $R_2 = 0,0083 \Omega$ et $L_2 \cdot \omega = 0,038 \Omega$) ce qui amène à pouvoir négliger les résistances R_1 et R_2 .

En simplifiant les expressions littérales précédentes en conséquence :

$$A = i_2/i_1 = \frac{-M}{L_2}$$

$$\text{et : } v_1 = jL_1 \omega i_1 + jM \omega \cdot \left(-\frac{M}{L_2}\right) \cdot i_1$$

Le calcul numérique, sachant que la valeur de mutuelle est estimée à $M = 2,0 \mu\text{H}$, donne des modules de $\underline{A} = M/L_2 = 8,3$

et de

$$Z_{e1} = \omega \cdot \sqrt{\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 2,1 \Omega$$

$$Z_{e1} = \omega \cdot \sqrt{\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 2,1 \Omega$$

4. La puissance dissipée dans les parties résistives du circuit inducteur et du circuit induit sera donc :

$$P_1 = R_1 I_1^2 = \frac{R_1 V_1^2}{\omega^2 \cdot \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 69,4 \text{ W}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = \frac{R_2 V_1^2 M^2}{\omega^2 \cdot \left(L_1 L_2 - M^2\right)^2} = 2,22 \text{ kW}$$

5. On soulève le récipient. Le champ magnétique créé par l'inducteur et vu par la plaque intégrée au récipient diminue. Le flux magnétique à travers cette plaque diminue et donc l'induction mutuelle M diminue. Alors l'impédance d'entrée Z_e augmente pour une même valeur de tension d'alimentation, donc la valeur efficace de l'intensité dans l'inducteur $I_1 = V_1/Z_{e1}$ va décroître. Il en sera de même pour I_2 l'intensité dans la plaque chauffante fixée au récipient.

6. Dimensionnement d'un transformateur ☺☺

- En sortie du transformateur : $v_2(t) = mv_1(t)$
- En sortie du redresseur : $v_3 = |v_2| = m|v_1|$
- En sortie du moyeneur : $v_4 = \langle v_3 \rangle = \langle |v_2| \rangle = m\langle |v_1| \rangle$

Calculons la valeur moyenne de v_1 , avec $T = \frac{1}{f_0}$, en notant que $\sin(2\pi f_0 t)$ est positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{T}{2}, T\right]$.

$$\begin{aligned}\langle |v_1| \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T V_{0,1} |\sin(2\pi f_0 t)| dt \\ &= \frac{V_{0,1}}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi f_0 t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -\sin(2\pi f_0 t) dt \right) \\ &= \frac{V_{0,1}}{T} \left(-\frac{\cos(2\pi f_0 T/2) - 1}{2\pi f_0} + \frac{\cos(2\pi f_0 T) - \cos(2\pi f_0 T/2)}{2\pi f_0} \right) \\ &= V_{0,1} \frac{1 + 1 + 1 + 1}{2\pi} \\ &= \frac{2V_{0,1}}{\pi}\end{aligned}$$

Ainsi on a : $v_4 = \frac{2mV_{0,1}}{\pi}$, soit $m = \frac{\pi v_4}{2V_{0,1}} = 7,9 \cdot 10^{-2}$

Il faut environ 13 fois plus de spires au primaire qu'au secondaire.