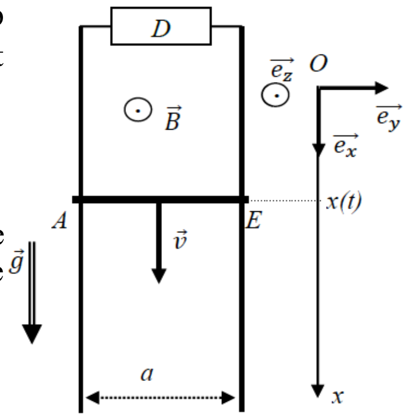
1. Barre qui tombe dans le champ de pesanteur

Une barre AE de masse m et de résistance nulle peut glisser sans frottement sur deux rails conducteurs parallèles, verticaux, séparés d'une distance a. Le système est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}=B\vec{e}_z$. Ces deux rails ont une résistance négligeable et se referment sur un dipôle D.



On négligera toute inductance propre du circuit.

On notera $\vec{g}=g\vec{e}_x$ l'accélération de la pesanteur.

À un instant t on repère la position de cette barre par l'abscisse $x(t)$ de son centre de masse. À l'instant initial (t = 0), on choisit $x(0)$ = 0 et la barre a une vitesse nulle.

Étudier le mouvement de la barre dans les deux cas suivants :

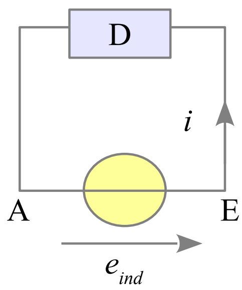
1. D est une self parfaite d'inductance L.
2. D est un condensateur parfait de capacité C.

Solution :

La surface du circuit traversée par le champ B à l'instant t est :

S = a (x).. On oriente l'intensité de telle manière que et $\vec{B}$ et $\vec{S}$ soient dans le même sens. .On a ainsi $\Phi=B\times a(x)$. On en déduit la fem induite : $e_{ind}=\frac{-d\,\Phi}{dt}=\frac{-d(B\times a\,x)}{dt}=-B\,a\frac{d\,x}{dt}=-B\,a\,v$.

<u>Equation mécanique :</u>



Bilan des forces s'exerçant sur la barre :

La force de Laplace : $\vec{F}_L=i\,\overrightarrow{AE}\wedge\vec{B}=i\,a\,B\vec{e}_x$ (i < 0)et le poids : $\vec{P}=m\,g\,\vec{e}_x$

2ème loi de Newton :

$\vec{F}_L+\vec{P}=m\vec{a}$ en projetant sur l'axe vertical, on obtient : $i\,a\,B+m\,g=m\,\ddot{x}$ **(EM)**

1) Le dipôle D est une bobine

$e_{ind}=L\frac{d\,i}{dt}=-B\,a\,v$ **(EE)**

Pour faire apparaître $\frac{d\,i}{dt}$ dans l'équation mécanique, on la dérive. D'où $a\,B\frac{d\,i}{d\,t}=m\,\ddot{v}$ d'où $\frac{d\,i}{d\,t}=\frac{m}{B\,a}\ddot{v}$ d'où en remplaçant dans (EE) : $\ddot{v}+\frac{B^2a^2}{m\,L}v=0$. On pose $\omega_0^2=\frac{B^2a^2}{m\,L}$, on obtient : $\boxed{\ddot{v}+\omega_0^2 v=0}$. La solution est du type : $v(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$. On suppose qu'à t=0, v = 0 d'où A = 0. On a également i = 0. D'après l'équation mécanique, on en déduit que $\left(\frac{d\,v}{d\,t}\right)_0=g=B\,\omega_0$ d'où $\boxed{v(t)=\frac{g}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$. Par intégration en considérant x(0) = 0, on obtient : $\boxed{x(t)=\frac{g}{\omega_0^2}(1-\cos\omega_0 t)}$

2) <u>Le dipôle D est un condensateur</u>

$i=C\frac{d\,e_{ind}}{dt}=-B\,a\,C\frac{d\,v}{dt}$ (EE). Pour avoir l'équation du mouvement, on remplace i dans l'équation mécanique.

D'où : $-B^2a^2C\frac{d\,v}{dt}+m\,g=m\frac{d\,v}{dt}$ d'où $\boxed{\ddot{x}=\frac{m\,g}{B^2a^2C+m}}$. A t= x = 0 et v = 0, on en déduit :

$\boxed{x(t)=\frac{1}{2}\frac{m\,g}{B^2a^2C+m}t^2}$.

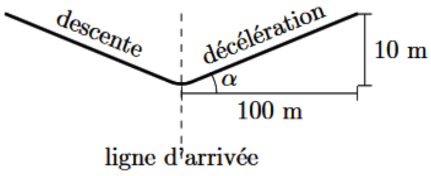
2. Amortissement électromagnétique *(Concours ATS 2013)* ☺☺

Une luge de masse $m = 100$ kg franchit la ligne d'arrivée à la vitesse $v_a = 30\ m.s^{-1}$

Dans le problème, les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu.

L'intensité de la pesanteur g est prise égale à 10 $m.s^{-2}$.

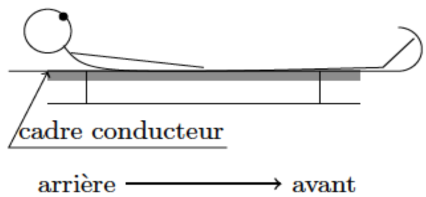
Ralentissement mécanique



Le ralentissement à l'arrivée se fait sur une piste inclinée de 10% (on monte de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On note l'angle d'inclinaison α

1. Déterminer la longueur L de la piste de ralentissement nécessaire pour que la luge passe de $v_a = 30\ m.s^{-1}$ à l'arrêt, en utilisant la conservation de l' énergie mécanique. Faire l'application numérique et conclure sur la faisabilité de cette méthode de ralentissement.

Freinage par induction

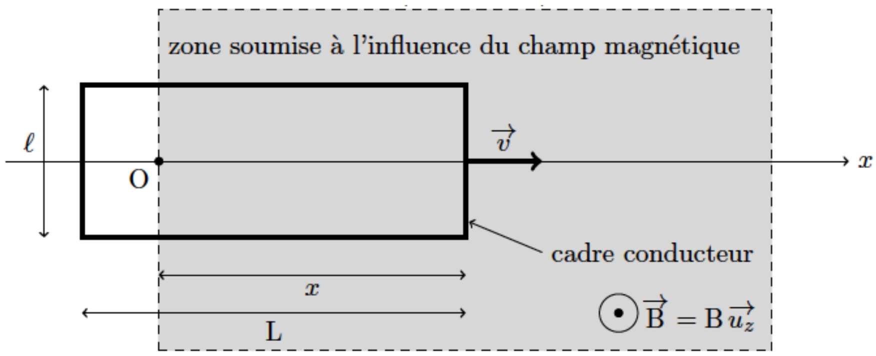


On cherche une autre solution que celle de la pente inclinée pour ralentir une luge : le freinage par induction.

On fixe sous la luge un cadre métallique rigide, conducteur, rectangulaire, de résistance totale $R_c = 10^{-3}\Omega$ et de côtés $l \times L$ ($l = 50{,}0$ cm et L = 100 cm).

La piste est horizontale et le long de l'axe Ox, dont l'origine O est fixée sur la ligne d'arrivée, avant la zone de freinage. L'origine des temps est également fixée au passage de la ligne d'arrivée. L'axe Oz désigne la verticale ascendante.

Un dispositif crée un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u_z}$ (B = 1,00 T) sur toute la piste de décélération.



Cadre conducteur entrant dans la zone magnétique

2. Décrire (sans calcul) les différentes phases du mouvement de la luge depuis la ligne d'arrivée jusqu'à ce qu'elle ait franchi complètement la zone soumise au champ magnétique, supposée ici d'une longueur supérieure à L.

3. Le champ magnétique a une valeur de 1 T. Est-ce élevé ? Quel dispositif pourrait, par exemple, créer un champ de cette intensité ?

Dans la suite, on s'intéresse au mouvement du cadre lorsqu'il n'a pas entièrement pénétré dans la zone soumise à l'influence du champ magnétique.

4. Exprimer la surface S du cadre soumise au champ magnétique en fonction de l et x. En déduire l'expression du flux magnétique Φ qui traverse le cadre dans le sens $+\vec{u_z}$ lorsqu'il pénètre dans la zone magnétique.

5. En utilisant la loi de Lenz-Faraday, exprimer et représenter la force électromotrice e qui apparaît dans le cadre en fonction de la vitesse v du cadre, de sa largeur l et du champ magnétique B.

6. Le circuit électrique équivalent au cadre rectangulaire est constitué de la force électromotrice e et de la résistance R_c. On néglige l'inductance propre du cadre. Exprimer l'intensité i induite dans le cadre en fonction de B, l, v et R_c.

7. Exprimer la force de Laplace élémentaire $\vec{dF_L}$, s'exerçant sur un élément de cadre de longueur $\vec{dl}$ parcouru par l'intensité i.

8. En déduire la résultante de la force de Laplace $\vec{F_L}$ qui s'exerce sur le cadre, en fonction de l'intensité i, l, B et d'un vecteur unitaire puis en fonction de R_c, v, l, B et d'un vecteur unitaire. Commenter le sens de cette force.

9. Par application du principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe Ox, donner l'équation différentielle qui porte sur la vitesse v de la luge.

10. La solution de cette équation différentielle s'écrit : $v(t)=v_a \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ τ est le temps caractéristique du mouvement lorsque la luge pénètre dans la zone soumise au champ magnétique. Exprimer τ en fonction de B, m, l et R_c. Faire l'application numérique.

11. Exprimer la position $x(t)$ de la luge en fonction de t, τ et v_a.

12. Calculer la durée T que met le cadre de longueur L pour pénétrer entièrement dans la zone magnétique.

13. En déduire l'expression simplifiée de $v(T)$. Calculer numériquement la variation $\Delta v = v_0 - v(T)$ de vitesse de la luge entre les instants t = 0 et T.

14. Quelle est la vitesse de la luge une fois que le cadre est entièrement dans la zone soumise au champ magnétique ? Justifier. En déduire la longueur idéale de la zone soumise au champ magnétique.

15. La zone soumise au champ magnétique n'occupe pas toute la piste de décélération mais est limitée à la longueur idéale déduite précédemment. Que se passe-t-il lorsque le cadre conducteur sort de cette zone ?

16. On installe une alternance de zones magnétiques et non magnétiques. Combien de zones magnétiques sont nécessaires pour que la vitesse de la luge diminue jusque environ 5 $m.s^{-1}$, vitesse à partir de laquelle le lugeur peut freiner avec ses pieds ? Quelle est alors la longueur de la piste de ralentissement ?

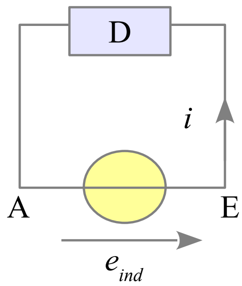
17. Donner un exemple d'utilisation de freinage par induction.

Solution :

La surface du circuit traversée par le champ B à l'instant t est :

S = a (x).. On oriente l'intensité de telle manière que et $\vec{B}$ et $\vec{S}$ soient dans le même sens. .On a ainsi $\Phi=B\times a(x)$. On en déduit la fem induite : $e_{ind}=\frac{-d\Phi}{dt}=\frac{-d(B\times a\,x)}{dt}=-B\,a\frac{dx}{dt}=-B\,a\,v$.

Equation mécanique :



Bilan des forces s'exerçant sur la barre :

La force de Laplace : $\vec{F}_L=i\,\overrightarrow{AE}\wedge\vec{B}=i\,a\,B\,\vec{e}_x$ (i < 0)et le poids : $\vec{P}=m\,g\,\vec{e}_x$

2ème loi de Newton :

$\vec{F}_L+\vec{P}=m\vec{a}$ en projetant sur l'axe vertical, on obtient : $i\,a\,B+m\,g=m\,\ddot{x}$ **(EM)**

1) Le dipôle D est une bobine

$e_{ind}=L\frac{di}{dt}=-B\,a\,v$ **(EE)**

Pour faire apparaître $\frac{di}{dt}$ dans l'équation mécanique, on la dérive. D'où $a\,B\frac{di}{dt}=m\,\ddot{v}$ d'où $\frac{di}{dt}=\frac{m}{B\,a}\ddot{v}$ d'où en remplaçant dans (EE) : $\ddot{v}+\frac{B^2a^2}{m\,L}v=0$. On pose $\omega_0^2=\frac{B^2a^2}{m\,L}$, on obtient : $\boxed{\ddot{v}+\omega_0^2 v=0}$. La solution est du type : $v(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$. On suppose qu'à t=0, v = 0 d'où A = 0. On a également i = 0. D'après l'équation mécanique, on en déduit que $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0=g=B\,\omega_0$ d'où $\boxed{v(t)=\frac{g}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$. Par intégration en considérant $x(0)$ = 0, on obtient : $\boxed{x(t)=\frac{g}{\omega_0^2}(1-\cos\omega_0 t)}$

2) Le dipôle D est un condensateur

$i=C\frac{d\,e_{ind}}{dt}=-B\,a\,C\frac{dv}{dt}$ (EE). Pour avoir l'équation du mouvement, on remplace i dans l'équation mécanique.

D'où : $-B^2a^2C\frac{dv}{dt}+m\,g=m\frac{dv}{dt}$ d'où $\boxed{\ddot{x}=\frac{m\,g}{B^2a^2C+m}}$. A t= x = 0 et v = 0, on en déduit :

$\boxed{x(t)=\frac{1}{2}\frac{m\,g}{B^2a^2C+m}t^2}$.

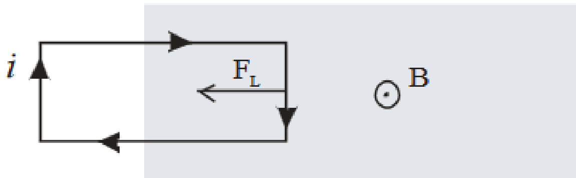
1. On néglige les forces de frottement donc le système est conservatif. On applique la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial où la luge franchit la ligne d'arrivée et l'instant final où elle s'arrête :

$E_m(t_i)=E_c(t_i)=\frac{1}{2}m v_a^2$ (on pose l'origine des énergies potentielles nulle à l'arrivée) . $E_m(t_f)=E_p(t_f)=m g h$ D'où $\frac{1}{2}m v_a^2=mgh=mgL\sin\alpha$ d'où : $\boxed{L=\frac{v_a^2}{2 g \sin\alpha}}$. On exprime α grâce au schéma : $\boxed{\sin\alpha=\frac{10}{\sqrt{10100}}=\frac{1}{\sqrt{101}}}$

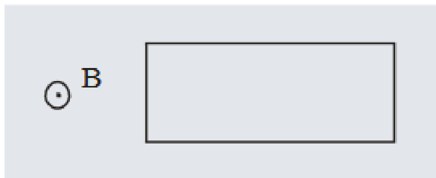
AN : $\boxed{L=\frac{900\times\sqrt{101}}{2\times 10}=452\,m}$. cette méthode nécessite une piste trop longue !

2. Loi de Lenz : Le courant induit s'oppose par ses effets aux causes qui lui ont donné naissance.

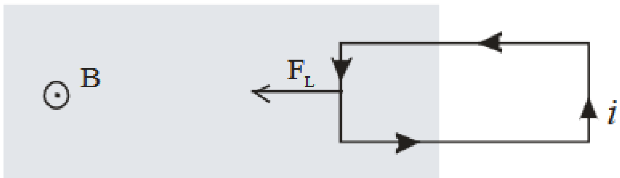
Phase1 : le cadre entre dans la zone de champs, le flux magnétique varie, un courant induit apparaît ainsi qu'une force s'opposant au mouvement. La luge ralentit.



Phase 2 : le cadre est entièrement dans la zone magnétique le flux magnétique à travers le cadre est constante. La luge a un mouvement rectiligne uniforme.



Phase 3 : le cadre sort de la zone magnétique, le flux magnétique varie de nouveau. un courant induit apparaît ainsi qu'une force s'opposant au mouvement. La luge ralentit.



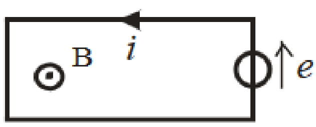
3. Un champ magnétique de 1T est intense.

Un champ magnétique uniforme sur une telle surface (50cmx100cm) est comparable aux machines médicales IRM et nécessite pour 1T un aimant supraconducteur à refroidissement à hélium liquide! Evidemment, on comprend que l'hypothèse d'un champ uniforme n'est là que pour simplifier le calcul et permettre de comprendre les

phénomènes mis en jeu, d'où la difficulté pour proposer un dispositif réaliste.

4. On oriente la surface dans le sens des z croissants. $\boxed{S=l\,x}$ Et $\boxed{\Phi=\vec{S}.\vec{B}=l\,x\,B}$

5. D'après la loi de faraday, $\boxed{e=\frac{-d\,\Phi}{dt}=-B\,l\,v}$.



6. D'après la loi de Pouillet : $\boxed{i=\frac{e}{R_c}=-B\,l\frac{v}{R_c}}$

7. $\boxed{d\,\vec{F}_L=i\,d\vec{l}\wedge\vec{B}}$

8. Schéma du bilan des forces de Laplace s'exerçant sur le cadre :

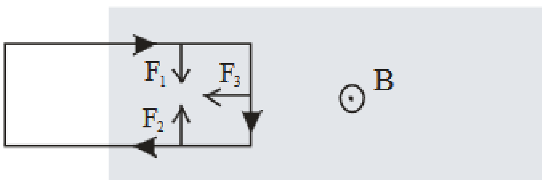


Schéma avec sens réel du courant

$\boxed{\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{0}}$. $\boxed{\vec{F}_3=\vec{F}_L=i\,\vec{l}\wedge\vec{B}=-i\,l\,B\,\vec{u}_x}$ d'où $\boxed{\vec{F}_L=\frac{-v\,l^2\,B^2}{R_c}\vec{u}_x}$. la force de Laplace est bien opposée au mouvement.

9. Sur l'axe Ox s'exerce uniquement la force de Laplace, par application de la 2ème loi de Newton, on obtient : $\boxed{m\frac{dv}{dt}+\frac{v\,l^2B^2}{R_c}=0}$.

10. L'équation du mouvement sous sa forme canonique s'écrit : $\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=0}$. par identification : $\boxed{\tau=\frac{m\,R_c}{l^2B^2}}$. AN : $\boxed{\tau=\frac{100\times 10^{-3}}{0{,}5^2\times 1^2}=0{,}4\,s}$.

11. Par intégration en considérant à $t=0, x=0$, on obtient : $\boxed{x(t)=\tau\,v_a\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$.

12. $x(\infty)=\tau\,v_a=0{,}4\times 30=12\,m>L$. Le cadre pénètre totalement dans la zone magnétique.

On a $x(T)=L=\tau\,v_a\left(1-e^{-\frac{T}{\tau}}\right)$ d'où $\boxed{T=-\tau\ln\left(1-\frac{L}{\tau\,v_a}\right)}$. AN : $\boxed{T=-0{,}4\ln\left(1-\frac{1}{12}\right)=35\,ms}$.

13. $\boxed{v(T)=v_a e^{-\frac{T}{\tau}}=v_a\left(1-\frac{L}{\tau\,v_a}\right)=v_a-\frac{L}{\tau}}$. On en déduit : $\boxed{\Delta v=v_a-v(T)=\frac{L}{\tau}=\frac{1}{0{,}4}=2{,}5\,m.s^{-1}}$.

14. Une fois dans la zone où règne le champ magnétique, la luge a un mouvement rectiligne uniforme sa vitesse est $\boxed{v(T)=27{,}5\,m.s^{-1}}$. **La longueur idéale pour la zone de champ est L .**

15. Quand le cadre sort de la zone, il est freiné de la même façon qu'il est accéléré en rentrant dans la zone et subit une nouvelle variation de vitesse $\boxed{\Delta v=\frac{L}{\tau}=2{,}5\,m.s^{-1}}$.

16. A chaque zone constituée de 1m de champ et 1m sans champ, la luge perd 5m.s^{-1}. **Il faut 5 zones soit 10m de pistes.**

17. Autre freinage par induction : **freinage des TGV.**