Modélisation d'une suspension de véhicule

(CCP TSI 2013)

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : **les suspensions à ressorts.** De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement.

Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat…

Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

Données : Champ de pesanteur : g = 10 m.s^{-2}.

Hypothèses : tout au long du problème, on considérera que :

- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule
- l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve à tout instant en contact avec le sol ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

Notations :

dérivées temporelles : Pour une fonction *x(t)* les dérivées temporelles seront notées : $\dot{x}(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ et $\ddot{x}(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

fonctions complexes : pour une fonction $x(t)=X_m\cos(\omega t+\phi)$.

On notera $\underline{x}(t)=X_m e^{j(\omega t+\phi)}=X_m e^{j\phi}e^{j\omega t}=\underline{X}\,e^{j\omega t}$,

où $x(t)=\Re(\underline{x}(t))$ et $\underline{X}=X_m e^{j\phi}$.($\underline{X}$ représente l'amplitude complexe de *x(t)*)

On a donc $X_m=|\underline{X}|$ et $\phi=arg(\underline{X})$.

Première partie : suspension sans amortissement

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse $m = 1{,}0.10^3$ *kg*.

La suspension est constituée , d'un ressort de masse négligeable de raideur $k = 1{,}0.10^5\ N.m^{-1}$ et de longueur au repos l_0.

Dans cette première partie on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule. La position du véhicule est repérée par sa coordonnée *z(t)*, l'axe *Oz* étant vertical ascendant muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_z$ *(figure 1)*.

z(t) représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort.

A l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnée z_e.

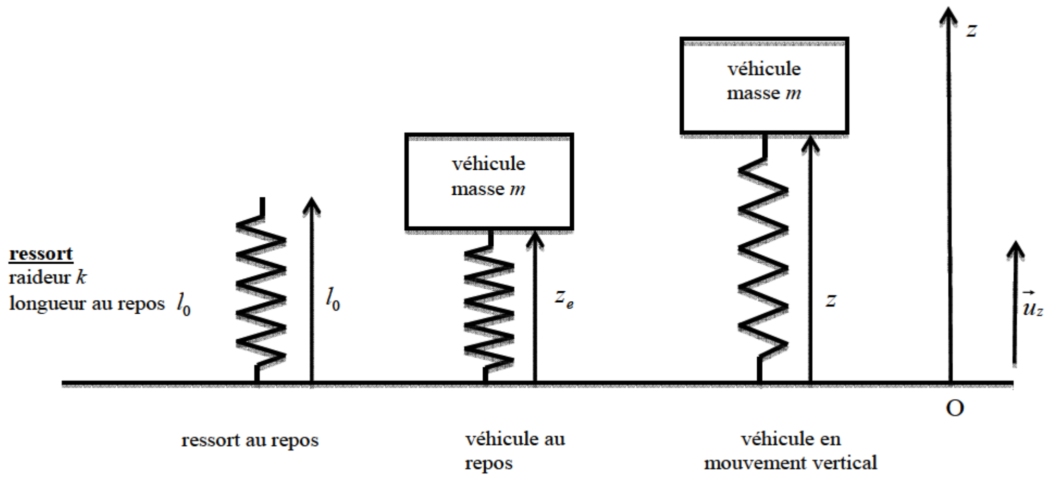


Figure 1 : suspension sans amortissement

1. Faire le bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme. Montrer que le véhicule constitue un système conservatif.

2. Exprimer l'énergie potentielle du véhicule, en déduire l'expression de sa cote z_e à l'équilibre en fonction de m, g, k et l_0.

3. Établir l'intégrale première de l'énergie. En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $z(t)$ sous la forme : $\ddot{z}+\omega_0^2 z=\beta$. Exprimer ω_0 et β en fonction de z_e, k, et m.

4. Donner la solution générale de l'équation différentielle du mouvement en prenant comme paramètre d'étude ω_0 et z_e. Calculer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 .

5. On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans une position repérée par la cote z_0 où $z_0<z_e$. A un instant t=0, choisi comme origine du temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer z(t) en fonction de t, z_e, ω_0 et z_0.

6. Exprimer $z(\frac{T_0}{4})$, $z(\frac{T_0}{2})$, $z(\frac{3T_0}{4})$ et $z(T_0)$. Tracer l'allure de z(t), faire apparaître sur le graphe les cotes minimales z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy} ainsi que la période propre T_0 . Donner les expressions des cotes minimale z_{min}, maximale z_{max} et moyenne z_{moy} en fonction de z_e et z_0.

7. Établir l'expression temporelle de l'énergie cinétique. Exprimer $E_C(\frac{T_0}{2})$. Comparer $E_P(\frac{T_0}{2})$ et $E_P(0)$. Commenter.

<u>Deuxième partie:</u> suspension avec amortissement

On suppose que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m, une force d'amortissement visqueux donnée par $\vec{f}=-h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide (figure 2).

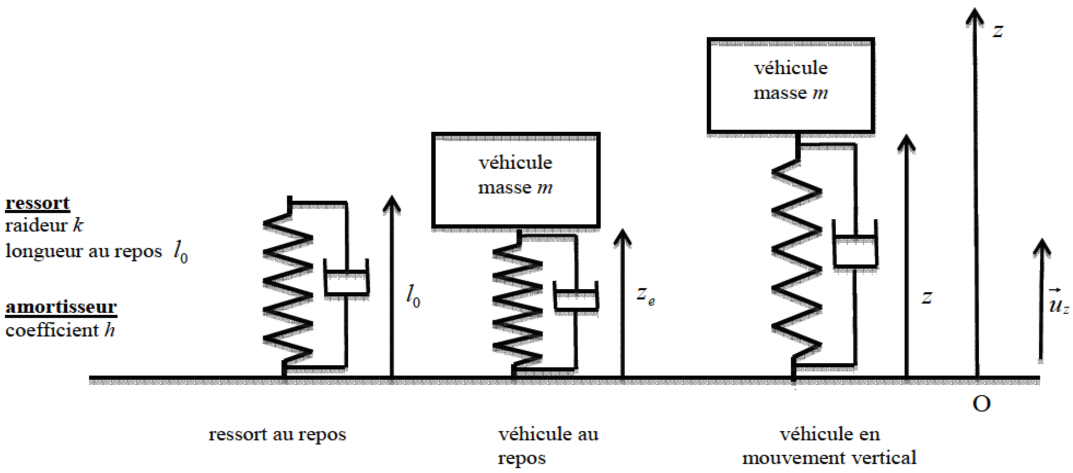


Figure 2 : suspension avec amortissement

8. Quel est l'unité de h dans le système international ?

9. Faire le bilan des forces appliquées au véhicule hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme. Écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est l'équilibre.

10. En appliquant le théorème de la puissance cinétique au véhicule, établir l'équation différentielle vérifier par z(t). Dans cette équation apparaîtront les différentes grandeurs z_e, k, m et h.

11. Écrire les conditions portant sur les paramètres m, k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes pseudopériodique, critique et apériodique.

12. <u>**Véhicule en charge**</u>

12.1. Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-il lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

12.2. Dès lors comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudopériodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

Le véhicule se déplace maintenant sur un sol non plat. La position du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable z_s(t) (figure 3). Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.

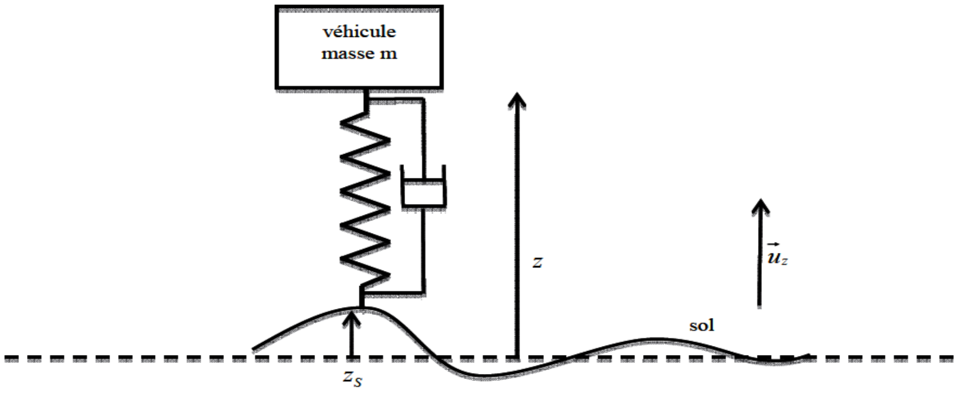


Figure 3 : véhicule sur un sol non plat de profil quelconque

13. <u>Dans cette question le véhicule se déplace sur une route telle-que :</u>

- $t < t_1$; $z_s(t) = z_1$ où z_1 est une constante positive et $t_1 > 0$;
- $t > t_1$; $z_s(t)=0$.

Pour illustrer la situation, on pourra imaginer qu'à l'instant t_1 le véhicule descend d'un trottoir de hauteur z_1 et rejoint une route plane et horizontale de cote nulle.

On considère que pour $t < t_1$, la cote z(t) du véhicule est constante c'est à dire que le véhicule se déplace en régime permanent.

13.1. Donner l'allure de *z(t)* pour t variant entre 0 et $t >> t_1$ lorsque la suspension est en régime pseudopériodique.

13.2. Donner l'allure de *z(t)* pour t variant entre 0 et $t >> t_1$ lorsque la suspension est en régime apériodique.

On précisera clairement sur chaque graphique la valeur de z pour $0 < t < t_1$ et la valeur de z pour t tendant vers l'infini.

<u>Troisième partie:</u> régime forcé

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1. Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol. Ici encore, la position du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 4). dans cette partie, le véhicule se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal. On a ainsi : $z_s(t)=z_{s0}\cos(\omega t)$.

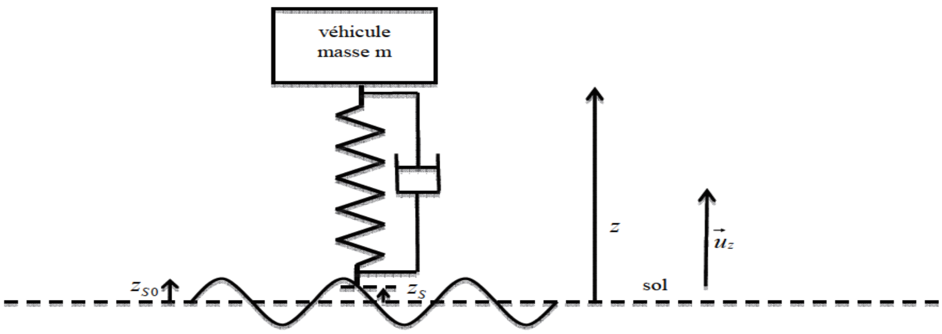


Figure 4 : régime forcé

La suspension comporte un système d'amortissement visqueux ; son action sur le véhicule est modélisée par la force $\vec{f}=-h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide. On a donc $\vec{f}=-h(\dot{z}-\dot{z}_s)\vec{u}_z$.

14. Déterminer l'expression de la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse *m* en fonction de *k, z, z_s l_0* et du vecteur unitaire $\vec{u}_z$.

15. En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer l'équation différentielle vérifiée par *z(t)* et *$z_s(t)$* et leur dérivées temporelles ainsi que les paramètres *h*, *m*, *k* et z_e (où z_e représente la longueur du ressort à l'équilibre statique calculée à la question 2)

Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e , on posera $z'= z- z_e$.

16. Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme : $m\ddot{z}'+h\dot{z}'+kz'=Y(t)$. Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de z_s , $\dot{z}_s$, k et h.

Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes rappelées au début de l'énoncé.

17. Pour simplifier les notations, on posera : $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ et $2\lambda=\frac{h}{m}$. Déterminer l'expression de la réponse complexe $\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}$ de la suspension en fonction de ω , ω_0 et λ . Montrer que le module de la réponse complexe est donné par l'expression :

$$H=\left|\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}\right|=\sqrt{\frac{\omega_0^4+4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2}}$$

Par la suite, les candidats pourront utiliser l'expression précédente du module de la réponse complexe, même s'ils ne sont pas parvenus à la démontrer.

18. <u>Étude de la réponse complexe.</u>

18.1. Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.

18.2. Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.

18.3. On considère pour simplifier :

- que la valeur maximale de H est atteinte pour une pulsation ω_r non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimal ;
- que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2>2\lambda^2$.

Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ . A quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r ?

<u>Remarque :</u> *en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de H aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de H dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.*

19. Donner l'allure de la courbe représentant H en fonction de ω . On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

Correction (CCP TSI 2013)

modélisation d'une suspension de véhicule

Première partie : suspension sans amortissement

1. Le véhicule est soumis à son poids : $\vec{P}=-mg\vec{u_z}$ et à la force de rappel du ressort : $\vec{T}=-k(z-l_0)\vec{u_z}$. Ces 2 forces sont conservatives donc le véhicule constitue un système conservatif.

2. Le poids dérive de l'énergie potentielle : $E_{P_p}=+mgz$ en considérant $E_{P_p}(0)=0$.

La force de rappel du ressort dérive de l'énergie potentielle : $E_{P_e}=\frac{1}{2}k(z-l_0)^2$.

L'énergie potentielle du véhicule est donc $\boxed{E_P=E_{P_p}+E_{P_e}=+mgz+\frac{1}{2}k(z-l_0)^2}$.

A l'équilibre E_P est extrémale . On traduit cette propriété mathématiquement par la relation :

$\left(\frac{dE_P(z)}{dz}\right)_{z_e}=mg+k(z_e-l_0)=0$ d'où $\boxed{z_e=l_0-\frac{mg}{k}}$.

3. $E_m=E_C+E_P$. $E_C=\frac{1}{2}m\dot{z}^2$. L'énergie mécanique du véhicule est constante, on en déduit l'intégrale première de l'énergie : $\boxed{E_m=\frac{1}{2}m\dot{z}^2+mgz+\frac{1}{2}k(z-l_0)^2=cste}$. En dérivant cette relation, on obtient l'équation du mouvement. $\frac{dE_m}{dt}=m\dot{z}\ddot{z}+mg+k(z-l_0)\dot{z}=0$ d'où $\ddot{z}+\frac{k}{m}z=\frac{k}{m}(l_0-\frac{mg}{k})$ d'où $\boxed{\ddot{z}+\omega_0^2 z=\frac{k}{m}z_e}$.

Par identification : $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{\beta=\frac{k}{m}z_e}$.

4. La solution générale de l'équation du mouvement est : $\boxed{z(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)+z_e}$.

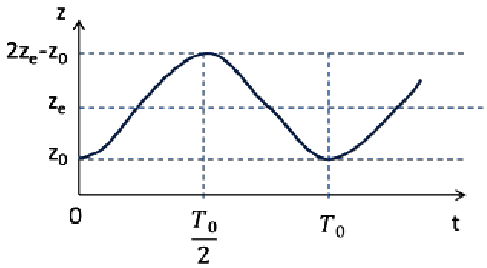
$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{10^5}{10^3}}=10\,rad.s^{-1}}$ et $\boxed{T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=0,63\,s}$.

5. A t= 0, $z(0)=A+z_e=z_0$ et $\dot{z}(0)=B\omega_0=0$ on en déduit que : $\boxed{z(t)=z_e+(z_0-z_e)\cos(\omega_0 t)}$

6. On calcule z(t) pour différentes valeurs de t :

$\boxed{z(\frac{T_0}{4})=z_e}$, $\boxed{z(\frac{T_0}{2})=2z_e-z_0}$, $\boxed{z(\frac{3T_0}{2})=z_e}$, $\boxed{z(T_0)=z_0}$.

D'où l'allure ci-contre et $\boxed{z_{moy}=z_e}$; $\boxed{z_{max}=2z_e-z_0}$; $\boxed{z_{min}=z_0}$



7. $E_C=\frac{1}{2}m\dot{z}^2=\frac{1}{2}m\omega_0^2(z_0-z_e)^2\sin^2(\omega_0 t)$ donc $E_C(\frac{T_0}{2})=E_C(0)=0$ .D'après le principe de conservation de d'énergie : $E_P(\frac{T}{2})=E_P(0)$. En t=0 et en $t=\frac{T_0}{2}$. Toute l'énergie du véhicule est sous forme d'énergie potentielle.

Deuxième partie: suspension avec amortissement

8. On a : [h] = [F][v] = (kg.m.s^{-2})/(m.s^{-1}) =kg.s^{-1}

9. Le véhicule est soumis à son poids : $\vec{P}=-mg\vec{u_z}$,à la force de rappel du ressort : $\vec{T}=-k(z-l_0)\vec{u_z}$ et à la force de frottement fluide $\vec{f}=-h\vec{v}=-h\dot{z}\vec{u_z}$. Lorsque le véhicule est à l'équilibre, la vitesse vaut 0, donc $\vec{f}=\vec{0}$ par conséquent la position d'équilibre est donnée par la relation : $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}$ d'où $\boxed{z_e=l_0-\frac{mg}{k}}$. La position d'équilibre est inchangée.

10. $\frac{dE_C}{dt}=\vec{P}.\vec{v}+\vec{T}.\vec{v}+\vec{f}.\vec{v}$ .donc $m\,\dot{z}\,\ddot{z}=-m\,g\,\dot{z}+-k(z-l_0)\dot{z}-h\,\dot{z}\,\dot{z}$ d'où $\boxed{\ddot{z}+\frac{h}{m}\dot{z}+\frac{k}{m}z=\frac{k}{m}z_e}$

11. On écrit l'équation caractéristique : $r^2+\frac{h}{m}r+\frac{k}{m}=0$. Le discriminant de cette équation vaut : $\Delta=\frac{h^2}{m^2}-4\frac{k}{m}$

Si $\Delta>0$ donc si $h>2\sqrt{km}$, alors les solutions de l'équation caractéristique sont réelles et le régime est apériodique.

Si $\Delta<0$ donc si $h<2\sqrt{km}$, alors les solutions de l'équation caractéristique sont complexes et le régime est pseudopériodique.

Si $\Delta=0$ donc si $h=2\sqrt{km}$, alors la solution de l'équation caractéristique est double et le régime est critique.

12.

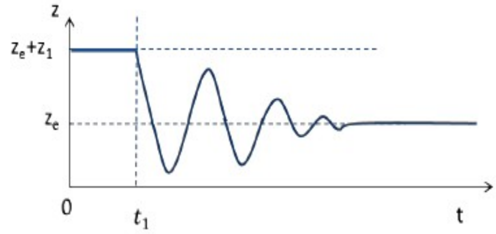
12.1. Soit m la masse du véhicule à vide et M masse de la charge. Si la suspension est en régime critique lorsque le véhicule à vide, alors $h=2\sqrt{km}$. En charge, m' = m +M > m, par conséquent $h<2\sqrt{k\,m'}$ le régime devient pseudopériodique.

12.2. Pour ne pas que la suspension soit en régime pseudopériodique même en charge, il faut choisir $h>2\sqrt{km}$. Dans la pratique, on peut supposer que M << m et que par conséquent, même en charge, la suspension reste en régime apériodique si $h=2\sqrt{km}$.

13. Il s'agit dans cette question d'étudier la réponse à un échelon de hauteur z_1 (marche).

13.1. $z(t<t_1)=z_1+z_e$ et $z(t>>t_1)=z_e$

D'où l'allure du graphe :

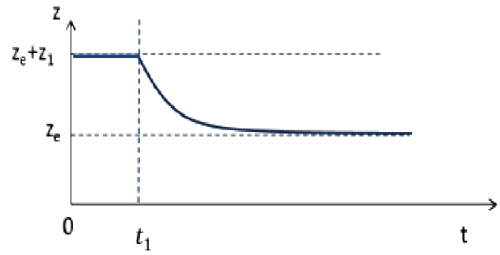


La solution (non demandée) est de la forme :

$$z(t)=e^{\frac{-h}{2m}t}(A\cos(\omega t)+B\cos(\omega t))+z_e \quad \text{où} \quad \omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{h^2}{4mk}}$$

Avec les CI : $A=z_1$ et $B=\frac{h\,z_1}{2\,m\,\omega}$

13.2. Allure du graphe :



La solution (non demandée) est de la forme : $z(t)=A\,e^{r_1 t}+Be^{r_2 t}+z_e$ avec r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique.

Avec les CI : $A=r_2\frac{z_1-z_e}{r_2-r_1}$ et $B=-r_1\frac{z_1-z_e}{r_2-r_1}$

<u>Troisième partie:</u> régime forcé

14. La longueur du ressort est $l=z-z_s$ on en déduit : $\vec{T}=-k(z-z_s-l_0)\vec{u_z}$

15. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on applique le principe fondamental de la dynamique à la voiture de masse m : $m\vec{a}=\vec{T}+\vec{P}+\vec{f}$. Par projection suivant $\vec{u_z}$ on obtient : $m\,\ddot{z}=-k(z-z_s-l_0)-mg-h(\dot{z}-\dot{z}_s)$ d'où :

$$\boxed{m\,\ddot{z}+h\,\dot{z}+k\,z=h\,\dot{z}_s+k\,z_s+k\,z_e}$$

16. On pose $z'=z-z_e$ on a alors $\dot{z}=\dot{z}'$ et $\ddot{z}=\ddot{z}'$ car z_e est une constante.On en déduit :

$\boxed{m\,\ddot{z}'+h\,\dot{z}'+k\,z'=h\,\dot{z}_s+k\,z_s}$ par identification : $\boxed{Y(t)=h\,\dot{z}_s+k\,z_s}$

17. On pose $\underline{Z'}=\underline{Z'_m}e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z'_m}=Z'_m e^{j\varphi}$ et $\underline{Z_s}=Z_{sm}e^{j\omega t}$

L'équation différentielle étant une équation linéaire, on peut directement la passer en grandeur complexe, par conséquent :

$$m\underline{\ddot{Z}'}+h\underline{\dot{Z}'}+k\underline{Z'}=h\underline{\dot{Z}_s}+k\underline{Z_s}$$

$$\Rightarrow -m\omega^2\underline{Z'}+j\omega h\underline{Z'}+k\underline{Z'}=j\omega h\underline{Z_s}+k\underline{Z_s}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}}=\frac{k+j\omega h}{k-m\omega^2+j\omega h}$$

En posant $\lambda = h/2m$ et ${\omega_0}^2 = k/m$ on obtient :

$$\Rightarrow \frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}} = \frac{{\omega_0}^2 + 2j\omega\lambda}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda}$$

En prenant le module de l'expression précédente, on obtient bien :

$$\left|\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}}\right| = \sqrt{\frac{{\omega_0}^4 + 4\omega^2\lambda^2}{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}$$

18.

18.1) Pour $\omega \to 0$ on a $H \to \sqrt{\frac{{\omega_0}^4}{{\omega_0}^4}} \to 1$.

La masse suit directement le relief du sol, $z = z_e + z_s$ $\forall t$ donc le ressort a constamment sa longueur d'équilibre.

18.2) Pour $\omega \to \infty$ on a $H \to \sqrt{\frac{4\lambda^2\omega^2}{\omega^4}} \to 0$.

La masse m ne bouge pas verticalement, $z = z_e$ $\forall t$.

18.3) ω_r est la pulsation pour laquelle le dénominateur est minimal.

On pose $g(\omega) = ({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2$.

$g'(\omega) = -4\omega({\omega_0}^2 - \omega^2) + 8\lambda^2\omega$

$g'(\omega_r) = 0 \Rightarrow \omega_r^2 = {\omega_0}^2 - 2\lambda^2$

L'énoncé précise qu'on est dans le cas où ${\omega_0}^2 > 2\lambda^2$, donc $\omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\lambda^2}$.

H est maximum pour $\omega = \omega_r$ donc cette pulsation correspond à la pulsation de résonance en élongation.

19. On trace l'allure de la courbe H(ω) en tenant compte des limites calculées :