Exercice 1. Skieur *.

Un skieur de masse $m = 75$ kg, assimilable à un point matériel, glisse en ligne droite sur une pente rectiligne verglacée (piste de vitesse dite de kilomètre lancé), sur une dénivellation $h = 500$ m, la pente étant de 30%. Parti sans vitesse initiale du point O, il arrive en A avec une vitesse v_A. On pourra prendre $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

a. Exprimer, puis calculer v_A, dans l'hypothèse de frottements négligeables.
b. En réalité, le skieur arrive avec une vitesse de $220\ \mathrm{km.h^{-1}}$, en déduire la valeur de la force de frottement exercée par la piste, dans l'hypothèse où elle est constante pendant tout le mouvement. Quelle force, sans doute importante, a été négligée ici ?

Exercice 2. Looping *.

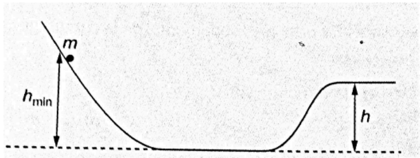


Figure 39

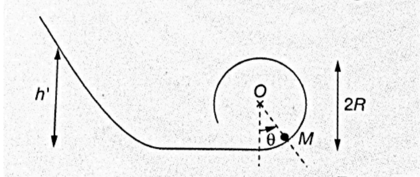


Figure 40

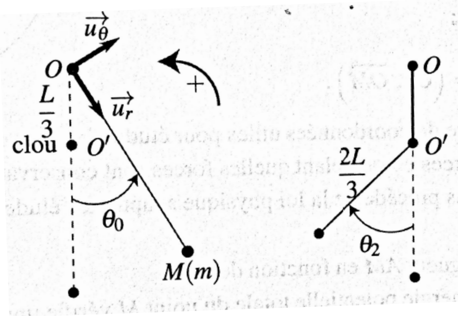
Une petite masse m peut glisser sans frottement sur des tremplins.

a. Sur le premier tremplin, de quelle hauteur $h_{\min}$ doit-on au moins lâcher la masse sans vitesse initiale afin qu'elle puisse remonter toute la pente à droite ?

On considère le second cas. La hauteur de l'endroit où la masse a été lâchée sans vitesse initiale est notée h'. On souhaite déterminer la hauteur minimale $h'_{\min}$ pour que la masse fasse un tour complet (looping) sur la boucle de rayon R.

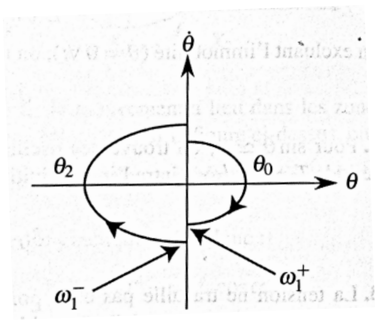
b. Expliquer qualitativement pourquoi $h'_{\min}$ n'est pas égale à $2R$.
c. Evaluer la vitesse v_0 atteinte au point le plus bas. En repérant par l'angle θ la position M de la masse sur la boucle, évaluer la norme v de la vitesse atteinte au point M en fonction de v_0, R, g et θ.
d. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse en projection sur le vecteur radial $\vec{u}_r$ et en déduire la réaction $\vec{N}$ de la piste sur la masse.
e. En déduire la hauteur minimale $h'_{\min}$ où la masse doit être libérée afin de faire un looping. Commenter le résultat.

Exercice 3. Pendule simple modifié **.



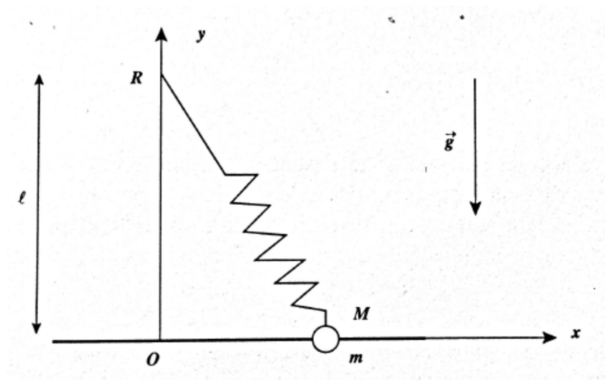
On considère un pendule simple modifié. Un mobile ponctuel M de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe en O. On néglige tout frottement. Lorsque $\theta > 0$, le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur de fil L. A la verticale et en dessous de O, un clou est planté en O' avec $OO' = L/3$, qui bloquera la partie haute du fil vers la gauche. Quand $\theta < 0$, le système se comporte donc comme un pendule simple de centre O' et de longueur de fil $2L/3$. On repère la position du pendule par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A la date $t = 0$, on abandonne sans vitesse initiale le mobile M en donnant au fil une inclinaison initiale $\theta(0) = \theta_0 > 0$. On note t_1 la date de la première rencontre du fil avec le clou, t_2 la date de la première annulation de la vitesse du mobile pour $\theta < 0$. L'intervalle de date $[0, t_1[$ est nommé première phase du mouvement, l'intervalle $]t_1, t_2]$ est nommé deuxième phase. A la date t_{1-} immédiatement inférieure à t_1, le fil n'a pas encore touché le clou et à la date t_{1+}, immédiatement supérieure, le fil vient de toucher le clou.

a. Par le théorème de la puissance cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par θ pour la première phase du mouvement.
b. Dans l'hypothèse des petites oscillations, on suppose $\sin\theta \approx \theta$. Déterminer la durée δt_1 de la première phase du mouvement sans résoudre l'équation.
c. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse v_{1-} de M à la date t_{1-}. En déduire la vitesse angulaire ω_{1-} à cette date.
d. Le blocage de la partie supérieure du fil par le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique. Déterminer la vitesse v_{1+} de M à la date t_{1+}. En déduire la vitesse angulaire ω_{1+} à cette date.
e. En utilisant les questions a et b, donner sans calcul la durée δt_2 de la deuxième phase.
f. Déterminer l'expression de l'angle θ_2 à la date t_2.
g. Décrire la suite du mouvement de ce système et donner l'expression de sa période T.
h. Dresser l'allure du portrait de phase, dans le système d'axes $(\theta, \dot{\theta})$. Conclure.

Réponses courtes :
a. Equation du pendule simple : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$
b. Quart de période de la première phase : $\delta t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$
c. Vitesse et vitesse angulaire : $v_{1-} = -\sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} \quad ; \quad \omega_{1-} = -\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta_0)}{L}}$
d. Vitesse et vitesse angulaire : $v_{1+} = -\sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} \quad ; \quad \omega_{1+} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta_0)}{L}}$
e. Quart de période de la seconde phase : $\delta t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2L}{3g}}$
f. Angle : $\cos\theta_2 = \frac{3\cos\theta_0 - 1}{2}$
g. Période : $T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$
h. Portrait de phase : 

Exercice 4. Ressort assujetti à une tige *.**

On s'intéresse au système mécanique suivant : un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k. La masse m peut coulisser sans frottement horizontalement sur une tige. On repère la position de M sur la tige par son abscisse x, O étant situé à la verticale du point d'attache R du ressort. La distance entre la tige et le point d'attache est $OR = l$.



a. Déterminer qualitativement les positions d'équilibre du système, ainsi que leur stabilité, selon que $l < l_0$ ou $l > l_0$.
b. Exprimer l'énergie potentielle élastique de M dans une position quelconque en fonction de x, l, l_0 et k. On choisira $E_p(0) = 0$.
c. Déterminer par le calcul les abscisses des positions d'équilibre et la stabilité de chacune, selon que $l < l_0$ ou $l > l_0$. Comparer avec la question a.

d. Tracer sur un même graphe la courbe donnant les abscisses des positions d'équilibres en fonction de l. Tracer avec des couleurs différentes la courbe des positions stables et celle des positions instables.

Réponses détaillées :

a. Cas où $l > l_0$, le ressort est toujours tendu et la force de rappel ne peut jamais s'annuler, donc la seule position d'équilibre est en $x = 0$. Si on écarte le système de cette position, les forces tendent à le ramener vers O, donc la position est stable.
Cas où $l < l_0$, le ressort est soit comprimé, soit tendu, il existe donc une position où le ressort a la longueur l_0. Pour cette position la tension est nulle et l'équilibre est possible pour une valeur de x telle que ${l_0}^2 = l^2 + {x_{\text{éq}}}^2$ (deux positions symétriques de part et d'autre de O). Si le point est éloigné de cette position d'équilibre, les forces tendent à le ramener, l'équilibre est stable. La position O est toujours une position d'équilibre mais instable car le ressort y est comprimé et si l'on s'écarte de ce point, les forces tendent à éloigner le système.

b. Energie potentielle élastique :

$$E_{pk} = \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right)^2 + cste \quad ; \quad E_p(0) = \frac{k}{2}(l - l_0)^2 + cste = 0 \quad \Rightarrow \quad cste = -\frac{k}{2}(l - l_0)^2$$

$$E_{pk} = \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right)^2 - \frac{k}{2}(l - l_0)^2$$

c. Position d'équilibre pour un extrema de l'énergie potentielle :

$$\frac{dE_{pk}}{dx} = \frac{k}{2}2\frac{1}{2}\frac{2x}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right) = kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right)$$

$$\frac{dE_{pk}}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad ; \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{{l_0}^2 - l^2}$$

Les solutions x_2 et x_3 ne sont possibles que dans le cas $l < l_0$.

Stabilité des équilibres :

$$\frac{d^2E_{pk}}{dx^2} = k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right) + kx\left(\frac{1}{2}\frac{2xl_0}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = k\left(1 + \frac{-l_0l^2 - l_0x^2 + l_0x^2}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = k\left(1 - \frac{l_0l^2}{(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\frac{d^2E_{pk}}{dx^2}(x_1) = k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$$

L'équilibre en x_1 dépend du cas considéré : si $l < l_0$ alors la dérivée seconde de l'énergie potentielle est négative et l'équilibre est instable, si $l > l_0$, c'est l'inverse.

$$\frac{d^2E_{pk}}{dx^2}(x_{2,3}) = k\left(1 - \frac{l^2}{{l_0}^2}\right) > 0$$

Les équilibres en x_2 et x_3 sont stables car la dérivée seconde est toujours positive dans le seul cas possible $l < l_0$.

d. Courbe (en fourche) des positions d'équilibre :