Od 3 **Ondes électromagnétiques dans le vide**

Hyp : (tt chapitre) vide de charges et de courants.
Comment les ondes électromagnétiques se propagent-elles dans le vide ? Quelle est la structure d'une onde de type OPPH ?
Comment le cinéma en 3D fonctionne-t-il ?

I/ Equations de propagation des champs

1) Equations de Maxwell dans le vide

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = 0 \qquad (MG)$$
$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (MF)$$
$$\mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \qquad (M\Phi)$$
$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (MA)$$

2) Equation de propagation de $\vec{E}$

(voir chap. EM4)

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$$

Savoir retrouver

3) Equation de propagation de $\vec{B}$

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})) = \vec{\mathrm{grad}}(\underbrace{\mathrm{div}(\vec{B})}_{=0}) - \Delta \vec{B}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\Delta \vec{B}$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}(\vec{E})\right) = -\Delta \vec{B}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$$

Savoir retrouver.

<u>Rappel</u> : en coord. cartésiennes :

$$\Delta \vec{w} = \begin{pmatrix} \Delta w_x \\ \Delta w_y \\ \Delta w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \vec{w} = (\Delta w_x)\vec{u_x} + (\Delta w_y)\vec{u_y} + (\Delta w_z)\vec{u_z}$$

4) Solutions générales ; intérêt des OPPH.

En coord. cart., et en projection sur les 3 axes on peut donc montrer que chaque composante du champ électromagnétique $\{E_x ; E_y ; E_z ; B_x ; B_y ; B_z\}$ satisfait à une équation de type d'Alembert :

$$\Delta a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 . \qquad (\text{le montrer !})$$

Les études des chap. Od1 et Od2 s'appliquent donc ici. On souligne à nouveau l'importance des OPPH du type :

$$a(M,t) = A\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)$$

avec $\vec{k} = k.\vec{u}$ ($\vec{u}$: direction de propagation) et $\vec{r} = \vec{OM}$

Cela est dû au résultat (admis) :

Toute solution des équations de Maxwell dans le vide est une superposition d'OPPH, la somme portant à la fois sur la direction de propagation $\vec{u}$ et sur la pulsation ω.

II/ Structure des OPPH dans le vide

1) OPPH et opérateurs en notation complexe

ⓐ Expression d'une OPPH

$$\vec{E}(M,t) = E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_x)\vec{u_x} + E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_y)\vec{u_y} + E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_z)\vec{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}}$$

avec $\vec{E}(M,t) = Re\{\underline{\vec{E}}(M,t)\}$

De manière similaire : $\boxed{\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B}_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}}$

avec $\vec{k} = k.\vec{u}$.

ⓑ Opérateurs

Exercice : montrer que pour un champ du type : $\underline{\vec{a}}(M,t) = \underline{\vec{a}_0}\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$:

$\dfrac{\partial \vec{a}}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega \times \vec{a}$ (multiplication)

$\text{div}(\vec{a}) \Leftrightarrow -j\vec{k}.\vec{a}$ (produit scalaire)

$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) \Leftrightarrow -j\vec{k} \wedge \vec{a}$ (produit vectoriel)

Oral : comment retrouver rapidement les relations avec du bon sens

Rq : - ⚠ pour une convention $e^{j(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$ les signes seraient inversés !
- uniquement en coord. cart. on aura l'équivalence $\vec{\nabla} \leftrightarrow -j\vec{k}$.

2) Equations de Maxwell en notation complexe

$$\begin{cases} -j\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 & (MG) \\ -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} & (MF) \\ -j\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 & (M\phi) \\ -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \varepsilon_0 \mu_0 j\omega \underline{\vec{E}} & (MA) \end{cases}$$

3) Structure des OPPH dans le vide (savoir retrouver)

ⓐ Transversalité du champ électrique (MG)

$\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$ soit $\vec{u}.\underline{\vec{E}} = 0$

$Re(\vec{u}.\underline{\vec{E}}) = 0$ donne $\vec{u}.Re(\underline{\vec{E}}) = 0$

soit $\boxed{\vec{u}.\vec{E} = 0}$

A tt instant le chp $\vec{E}$ est ⊥ à la direction de propagation de l'onde elmg.

Les OPPH dans le vide sont transverses électriques.

♡

② Transversalité du champ magnétique (MΦ)

De façon analogue on a : $\vec{u} \cdot \vec{B} = 0$

A tt instant le chp $\vec{B}$ est ⊥ à la direction de propagation de l'onde elmg.

$$\boxed{\text{les OPPM dans le vide sont transverses magnétiques}}$$

© Relation de dispersion

(MF) : $\underline{\vec{B}} = \frac{k}{\omega} \vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}$

(MA) : $k \vec{u} \wedge \underline{\vec{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$ $\qquad \left(\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}\right)$

D'où

$$k \vec{u} \wedge \left(\frac{k}{\omega} \vec{u} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

$$\frac{k^2}{\omega} \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}) = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \text{"} \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{c}\vec{a})\vec{b} \text{"}$$

$$\frac{k^2}{\omega} \Big[\underbrace{(\vec{u} \cdot \underline{\vec{E}})}_{=0} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \underline{\vec{E}} \Big] = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

$$-\frac{k^2}{\omega} \underline{\vec{E}} = -\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\boxed{\text{Relation de dispersion : } \underset{m^{-1}}{k} = \frac{\omega \;(\to \mathrm{rad.s^{-1}})}{c \;(\to \mathrm{m.s^{-1}})}}$$

② Couplage des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

(MF) : $\underline{\vec{B}} = \frac{1}{\omega}\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}}{c}$

D'où $\vec{B} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{B}}) = \mathrm{Re}\left(\frac{\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}}{c}\right) = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$

Pour une OPPH dans le vide, les chps $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont reliés selon :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

avec $\vec{u}$ vect. unitaire ds le / la sens / direct° de la propagat°.

Conséquences:

* en norme : $B(M,t) = \frac{E(M,t)}{c}$ en tt pt, à tout instant.
* le trièdre $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre orthogonal direct

* les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vibrent en phase.

montrer animation + doc

⚠ La structure mise en évidence ds ce § 3 n'est valable a priori que pour des OPPH ds le vide. Hors de ce cadre, il faut reprendre la méthode, mais avec les équations de Maxwell correspondant à la situation donnée.

III / Polarisation des OPPH

1) Contexte et définition

Dans ce qui suit on ne s'intéresse qu'au chp $\vec{E}$; le chp $\vec{B}$ s'en déduisant grâce à la relation $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$.

Le chp $\vec{E}$ est $\perp$ à la direction de propagation à tout instant. Mais c'est la seule contrainte imposée par les éq. de Mx, et la direction du chp $\vec{E}$ peut a priori varier au cours du temps dans un plan fixe ($x = cte$) $\perp$ à $\vec{u}$.

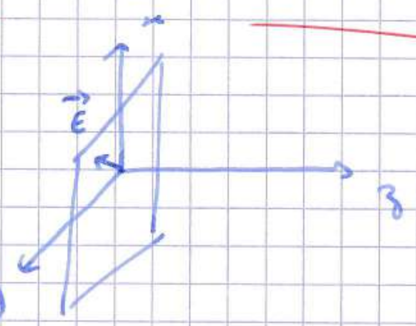
Déf : on appelle direction de polarisation d'une onde elmg plane progressive la direction du chp électrique $\vec{E}$.

2) Polarisation elliptique

(a) Expression de $\vec{E}$

En choisissant l'origine des temps de façon à annuler l'une des phases à l'origine, et en choisissant $\vec{u}_z$ cô direction de propagation, on peut écrire en tte généralité :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Savoir reconnaître