Phénomènes de transport 1
Transport de charge

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Passer d'une description microscopique (porteurs de charges, vitesse des porteurs) aux grandeurs mésoscopiques ρ et $\overrightarrow{j}$.
- ❑ Écrire l'intensité comme le flux du vecteur densité de courant électrique à travers une surface orientée.
- ❑ Établir, en coordonnées cartésiennes, l'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique.
- ❑ Énoncer l'équation locale et en interpréter chacun des termes.
- ❑ Définir une ligne de courant et un tube de courant.
- ❑ Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant électrique en régime stationnaire et relier cette propriété à la loi des nœuds usuelle de l'électrocinétique.
- ❑ Relier le vecteur densité de courant au champ électrique dans un conducteur ohmique.
- ❑ Citer des ordres de grandeur de la conductivité.
- ❑ Établir, en régime stationnaire, une expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique.
- ❑ Établir l'expression de la résistance d'un câble cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe.
- ❑ Établir l'expression de la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique.
- ❑ Interpréter l'effet Joule.

Résumé du cours

1 Différentes descriptions de la charge électrique

1.1 Description macroscopique (OdG : cm)

Certains objects peuvent posséder une charge électrique. La charge électrique se mesure en Coulomb (C).

Exemple

Les armartures des condensateurs possèdent une charge électrique.

Dans un milieu conducteur, un courant électrique peut apparaitre. Le courant électrique se mesure en Ampère (A). Le courant électrique est le débit de charge passant à travers une section.

Courant électrique

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Avec

- I le courant électrique (en A)
- Q la charge (en C)

1.2 Description microscopique (OdG : 10^{-10} m)

Au niveau microscopique, la charge est portée par des particules chargées appelées « porteurs de charge ».

Exemple

Électrons, protons, ions dans une solution, positons, noyau d'atome, trous dans les semi-conducteurs.

Ces particules peuvent être fixes (comme les noyaux d'atomes dans un cristal) ou mobiles (comme certains électrons dans les métaux.) Les charges mobiles sont toujours animées d'un mouvement d'agitation. Le mouvement d'agitation peut être accompagné d'un mouvement global.

Schéma Agitation et mouvement global

1.3 Description mésoscopique

Une troisième échelle, intermédiaire, est nécessaire pour

- décrire des systèmes pour lesquels la charge et le courant ne sont pas les mêmes partout,
- passer des propriétés microscopiques des matériaux à leurs propriétés macroscopiques.

L'échelle mésoscopique est très petite devant d'échelle macroscopique.

L'échelle mésoscopique est très grande devant l'échelle microscopique. Un système mésoscopiques contient un grand nombre de porteurs de charge.

Schéma Système mésoscopique

Il y a constamment des particules qui rentrent et qui sortent du système mésoscopique. Comme le système est très grand, les fluctuations dues à l'agitation sont négligeables.

Le système volumique permet de définir des grandeurs locales.

Densité particulaire

$$n(M,t) = \frac{\delta N}{\delta V}$$

Avec

- $n(M,t)$ la densité particulaire au point M et à l'instant t (en m^{-3})
- δN le nombre de particules contenues dans un volume mésoscopique autour du point M et à l'instant t (sans unité)
- δV le volume du volume mésoscopique autour du point M (en m^3)

Densité volumique de charge

$$\rho(M,t) = \frac{\delta Q}{\delta V}$$

Avec

- $rho(M,t)$ la densité volumique de charge au point M et à l'instant t (en $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}$)
- δQ la charge contenue dans un volume mésoscopique autour du point M et à l'instant t (en C)
- δV le volume du volume mésoscopique autour du point M (en m^3)

Densité volumique de charge et densité particulaire [1]

Hypothèses Les porteurs de charge sont tous identiques.

$$\rho = nq$$

Avec

- rho la densité volumique de charge au point (en $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}$)
- n la densité de porteurs de charges (en m^{-3})
- q la charge d'un porteur de charge (en C)

Lorsqu'il y a plusieurs types de porteurs de charge, il faut sommer la contributions de chacun : $\rho = \sum_{\text{types de porteurs de charge}} n_i q_i$

Application [2]

Le fer ${}_{26}Fe$ a pour masse volumique $\rho = 7{,}9\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$ et une masse molaire $M = 56\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$. Calculer la densité particulaire de noyaux de fer, la densité particulaire d'électrons et enfin la densité volumique de charge.

2 Déplacement global de charge

2.1 Le vecteur densité de courant électrique

Pour rendre compte du déplacement global des porteurs de charge, on définit le vecteur densité de courant électrique. Le vecteur densité de courant électrique est définit localement, en tout point de l'espace.

Vecteur densité de courant électrique

Hypothèses Tous les porteurs de charge mobiles sont identiques

---

$$\overrightarrow{j} = nq\overrightarrow{v}$$

Avec

- $\overrightarrow{j}$ le vecteur densité de courant électrique (en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$)
- n la densité particulaire de charges mobiles (en $\mathrm{m^{-3}}$)
- q la charge d'un poteur de charge mobile (en C)
- $\overrightarrow{v}$ la vitesse **moyenne** des porteurs de charges mobiles (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Vecteur densité de courant électrique [3]

Hypothèses Tous les porteurs de charge mobiles sont identiques

---

$$\overrightarrow{j} = \rho_{\text{mobile}}\overrightarrow{v}$$

Avec

- $\overrightarrow{j}$ le vecteur densité de courant électrique (en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$)
- ρ_{libre} la densité volumique de charge mobile (en $\mathrm{C \cdot m^{-3}}$)
- $\overrightarrow{v}$ la vitesse **moyenne** des porteurs de charges mobiles (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Lorsqu'il y a plusieurs types de porteurs de charge, il faut sommer la contributions de chacun : $\overrightarrow{j} = \sum_{\text{types de porteurs de charge}} n_i q$
$\sum_{\text{types de porteurs de charge}} \rho_i \overrightarrow{v}_i$.

2.2 Lien entre le vecteur densité de courant électrique et le courant électrique.

Le vecteur densité de courant électrique (propriété locale) peut être reliée au courant électrique (propriété globale).

Courant électrique [4]

Hypothèses La relation, démontrée en supposant l'absence d'agitation, peut être généralisée.

$$I = \iint_S \delta I = \iint_S \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}$$

Avec

- I le courant électrique à travers $\overrightarrow{dS}$ (en A)
- S une surface orientée
- $\overrightarrow{dS}$ une surface infinitésimale (en $\mathrm{m^2}$)
- $\overrightarrow{j}$ le vecteur densité de courant électrique (en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$)

2.3 Conservation de la charge

La charge est une grandeur conservative. La variation de charge est uniquement due à un transfert de charge, c'est-à-dire un courant électrique.

Équation locale de conservation de la charge [5]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \overrightarrow{j}$$

Avec

- ρ la densité volumique de charge (en $\mathrm{C \cdot m^{-3}}$)
- $\overrightarrow{j}$ le vecteur densité volumique de charge (en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$)

2.4 Équation de conservation de la charge en régime stationnaire

En régime stationnaire, l'équation de conservation de la charge s'écrit $\operatorname{div} \overrightarrow{j} = 0$, le vecteur densité de courant électrique est donc à flux conservatif en régime stationnaire.

Application [6]

Démontrer que le vecteur densité de courant électrique est à flux conservatif en régime stationnaire.

Application [7]

Démontrer la loi des nœuds en régime stationnaire.

3 Courant dans un métal : le modèle de Drude

3.1 Description microscopique d'un métal

Les matériaux conducteurs d'électricité sont nombreux.

Exemple

Les solutions ioniques, les plasmas, les semi-conducteurs, les métaux (cuivre, or, acier, bronze, …) sont des milieux conducteurs.

On s'intéressera dans la suite uniquement aux corps simples[1] cristallin métaux et semi-conducteurs. Les résultats pourront être généralisés à tout métal mais **pas** à tout.e conducteur, semi-conducteur ou solution ionique.

Un métal est un cristal ionique dans lequel certains électrons de Valence sont libres de se déplacer. Les électrons libres de se déplacer sont appelés électrons de conduction et forment la « mer d'électrons » qui transporte la charge macroscopiquement.

Le modèle de Drude est un modèle classique du déplacement des électrons dans un cristal. Dans le modèle de Drude, les électrons de conduction ont des mouvements désordonnés dans le réseau cristallin du fait des collisions avec les atomes du réseau. La vitesse de l'électron est aléatoire après la collision et toutes les directions sont équiprobables.

En l'absence de champ électrique, la vitesse moyenne des électrons est nulle. En présence d'un champ électrique, les électrons se déplacent globalement dans le sens opposé au champ électrique.

Schéma Mouvement désordonné des électrons de conduction à l'échelle microscopique

3.2 Conducteur soumis à un champ électrique

Les interactions entre électrons et atomes du réseau cristallin sont modélisées par une force de frottement fluide.

[1]Un corps simple est une substance chimique constituée d'un seul type d'atome.

Force modélisant les interractions entre les électrons et le métal dans le modèle de Drude

Hypothèses Le conducteur est un métal ou un semi-conducteur cristallin.

$$\vec{F} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$$

Avec

- $\vec{F}$ la force modélisant les interractions entre les électrons et le métal dans le modèle de Drude (en N)
- m_e la masse d'un électron (en kg)
- τ la durée moyenne entre deux collisions entre un électron et un atome du réseau cristallin (en s)
- $\vec{v}$ la vitesse de l'électron (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Application [8]

On s'intéresse à un électron d'un métal dans un champ électrique. Démontrer que la vitesse moyenne d'un électron soumis uniquement à la force de Lorentz et subissant des chocs avec le réseau cristallin est la même que celle d'un électron soumis à la force de Lorentz et à la force de frottement fluide ci-dessous.

Application [9]

Déterminer la vitesse limite atteinte par un électron dans un métal plongé dans un champ électrique.

La durée du régime transitoire est très courte. On considère que les électrons se déplacent toujours à leur vitesse limite.

Loi d'Ohm locale [10]

Hypothèses

- Le conducteur est un métal ou un semi-conducteur cristallin.
- La durée moyenne entre deux chocs est négligeable devant la durée caractéristique de variation du champ électrique.

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

Avec

- $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de charge (en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$)
- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- $\gamma = \frac{n_{\text{libre}} e^2}{m_e}\tau$ la conductivité électrique (en $\mathrm{S \cdot m^{-1}}$)
- n_{libre} la densité volumique de porteurs de charge libres (en $\mathrm{m^{-3}}$)
- m_e la masse d'un électron (en kg)
- e la charge élémentaire (en C)
- τ la durée moyenne entre deux collisions entre un électron et un atome du réseau cristallin (en s)

La résistivité est l'inverse de la conductivité. La résistivité se mesure en $\Omega \cdot \mathrm{m}$.

Exemple

La conductivité du cuivre pur est de $7 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$.

Application [11]

Calculer la durée moyenne entre deux chocs pour le cuivre pur. Justifier de l'hypothèse selon laquelle le régime permanent est très rapidement atteint.

3.3 Lien avec la loi d'Ohm intégrale

La loi d'Ohm est une conséquence de la loi d'Ohm locale.

Loi d'Ohm [12]

Hypothèses

- Le conducteur est un métal ou un semi-conducteur cristallin.
- La durée moyenne entre deux chocs est négligeable devant la durée caractéristique de variation du champ électrique.
- Le conducteur est cylindrique.

$$U = RI$$

avec $R = \frac{L}{\gamma S}$

Avec

- U la tension aux bornes du conducteur (en V)
- R la résistance (en Ω)
- I l'intensité du courant électrique (en A)
- L la longueur du conducteur (en m)
- S la section du conducteur (en m^2)
- γ la conductivité électrique (en $\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$)

3.4 Aspect énergétique

La puissance reçue par l'électron de la part du champ électrique est dissipée sous forme de chaleur à chaque choc avec le réseau cristallin. C'est la source de l'effet Joule.

Densité volumique de puissance dissipée par effet Joule [13]

$$p_{\mathrm{vol}} = \vec{j}.\vec{E}$$

Avec

- p_{vol} la densité volumique de puissance dissipée par effet Joule (en $\mathrm{W}\cdot{}^{-3}$)
- $\vec{j}$ le vecteur densité de courant électrique (en $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^{-2}$)
- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$)

Application [14]

Retrouver l'expression de la puissance dissipée par effet Joule dans un bareau cylindrique de section S et de longueur L à partir de la formule ci-avant.

3.5 Discussion de la validité du modèle

Application [15]

Calculer la durée moyenne entre deux chocs pour le cuivre. On donne $\mathcal{N}_a = 6{,}02\times10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, $m_e = 9{,}1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$, $\mu(\mathrm{Cu}) = 8{,}96\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$, $M(\mathrm{Cu}) = 63{,}5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$. La vitesse typique des électrons dans un métal est de $10^6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Calculer le libre parcours moyen d'un électron. Le comparer à la distance interatomique dans un cristal.

Il semble peu probable qu'un électron puisse voyager aussi longtemps dans le cristal sans subit de choc.

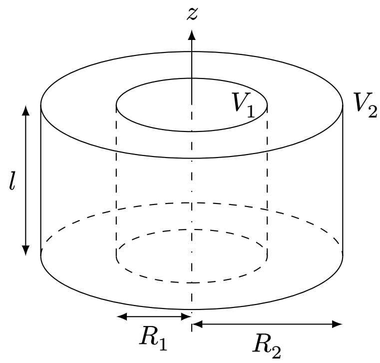
Le modèle de Drude explique bien la conduction électrique dans les métaux dans les conditions usuelles. Toutefois, le modèle de Drude possède des limites.

Un modèle plus précis devrait prendrait en compte l'interaction entre l'électron et le réseau cristallin de façon quantique.

TD

1 Resistance of a holed cylinder

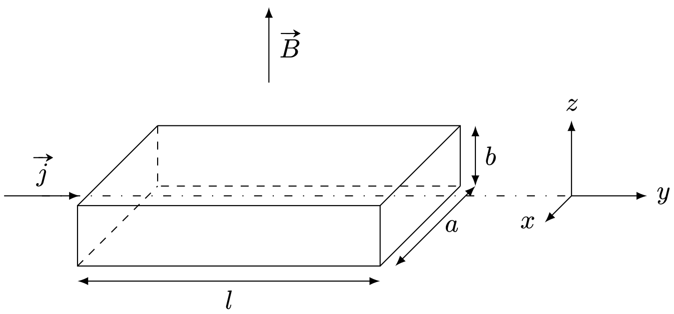
We study a ohmic conductor which shape is described below in steady state. γ represents the conductivity of the material, and V_1 and V_2 the electrical potentials inside and outside the tube respectively. I is the total current and $\vec{j}$ the current density vector.



1. In which direction is $\vec{j}$ oriented ?
2. item Why is the flux of $\vec{j}$ conservative ? By applying this between two concentric cylinders to deduce that $\vec{j} = C/r\vec{e_r}$ where C is a constant that we will not ascertain yet.
3. By integrating the previous expression between R_1 and R_2 and using Ohm's law, determine the resistance of the tube.

2 Effet Hall

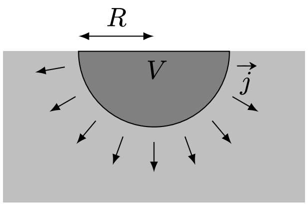
On considère un conducteur ohmique parallèpipédique parcourru par un courant I de vecteur densité de courant $\vec{j}$ uniforme et suivant $\vec{e_y}$. Ce conducteur est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, stationnaire et dirigé par $\vec{e_z}$.



1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur un électron du conducteur ohmique.
2. En régime stationnaire, les lignes de courant sont suivant $\vec{e_y}$. En déduire une expression de la composante E_x du champ électrique suivant $\vec{e_x}$ en fonction de la charge e d'un porteur, de leur densité n, de $\vec{j}$ et de $\vec{B}$.
3. En déduire la différence de potentiel existant entre les faces $x = -\frac{a}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$. L'exprimer en fonction de I et d'un paramètre qu'on notera R_{Hall} et dont on donnera l'unité.
4. Évaluer la valeur de R_{Hall} pour du cuivre puis pour un semi-conducteur de densité volumique de charges $n = 1{,}6 \times 10^{22}\,\text{m}^{-3}$. Est-il possible d'utiliser ce dispositif pour mesurer le champ magnétique terrestre ?

3 Paratonnerre ★

Un paratonnerre est relié à une demi-sphère métallique supposée parfaitement conductrice qui sert de contact entre le paratonnerre et le sol. Le sol a une conductivité $\gamma = 1 \times 10^{-2}\,\mathrm{S \cdot m^{-1}}$. On se place en régime stationnaire.



1. $\vec{j}$ est-il à flux conservatif dans le sol ? En déduire la dépendance en r de $\vec{j}$.
2. En déduire l'expression de $V(r)$ en supposant que V vaut 0 à l'infini.
3. Exprimer le potentien du paratonnerre en fonction du courant qui le parcourt et introduire la « résistance du sol ».
4. Cette résistance ne doit pas dépasse $30\,\Omega$. Déterminer le rayon minimum de la demi-sphère.
5. Pour un éclair, le courant peut atteindre $300\,\mathrm{kA}$.Déterminer le champ $V(r)$ associé.
6. Une personne qui n'a pas les deux pieds à la même distance de la demi-sphère peut avoir ses pieds à un potentiel différent. Sachant que la résistance entre ses pieds est de l'ordre $5\,\mathrm{k\Omega}$ et qu'un courant de $25\,\mathrm{mA}$ à travers le corps peut être dangereux, calculer la distance minimum à laquelle un homme doit se tenir de la demi-sphère en cas d'orage.

4 Magnéto-résistance ★

Le dispositif de l'exercice 2 est plongé dans un champ magnétique d'intensité B_0 stationnaire et orienté suivant $\vec{e_z}$.

1. En reprenant le modèle de Drude, déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}$ des porteurs de charges puis $\vec{j}$.
2. En utilisant la même méthode que dans l'exercice précédant, déterminer l'expression de la résistance R du système.